Aalto-yliopisto

MS-A0401 Diskreetin matematiikan perusteet
Harjoitus 2
14–18.9.2015, viikko 38

Gripenberg, Potka, Pöllänen, Tuhkanen, Ääri

Palauta P-tehtävät ja vastaa S-tehtäviin viimeistään 21.9.2015 klo. 16.00.
Muista kirjoittaa nimesi, opiskelijanumerosi ja harjoitusryhmäsi!

P1. Funktio $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$ määritellään rekursiivisesti kaavalla

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n = 1, \\ 5 \cdot f(n-1) - 6 \cdot f(n-2), & n \geq 2. \end{cases}$$

(a) Laske $f(5)$ laskemalla $f(2)$, $f(3)$ jne.

(b) Tarkista, että lauseke $3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$ toteuttaa funktion f määritelmää (jolloin saat toisen tavan laskea $f(5)$).

(c) Jos $\lambda \neq 0$ on sellainen luku, että $y(n) = 5 \cdot y(n-1) - 6 \cdot y(n-2)$ kun $y(n) = \lambda^n$, niin minkä yhtälön (jossa n ei esiinny) ratkaisu λ on ja mitkä ovat tämän yhtälön ratkaisut?

(d) Jos y_1 ja y_2 ovat yhtälön $y(n) = 5 \cdot y(n-1) - 6 \cdot y(n-2)$ ratkaisuja niin myös $y(n) = c_1 y_1(n) + c_2 y_2(n)$ on selvästikin (??) ratkaisu. Johda (b)-kohdassa esitetty funktion f lauseke tämän tuloksen, (c)-kohdan tuloksen ja ehtojen $f(0) = 1$ ja $f(1) = 0$ avulla.

P2. Jos meillä on jono lukuja $x = [x_1, x_2, \dots x_n]$ niin voimme tuottaa uuden jonon missä alkiot on järjestetty suuruusjärjestykseen esimerkiksi seuraavalla algoritmilla:

```
function x=Jarj(x)
   n=max(size(x));
   for i=1:n
     for j=1:i
       if x(i)<x(j)
         x([i,j])=x([j,i]);
       end
     end
   end
endfunction
```

Jos nyt x on lukujono jonka pituus on n niin olkoon $v(n)$ tämän algoritmin tekemien vertailujen (`x(i)<x(j)`) lukumäärä kun se laskee `Jarj(x)`. Määritä pienimmät mahdolliset ei-negatiiviset luvut a ja b siten, että $v \in O(n^a \log(n)^b)$.

P3. Muodosta pienin joukon $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ekvivalenssirelaatio, joka sisältää järjestetyt parit $[1, 4]$, $[2, 5]$, $[6, 8]$ ja $[7, 4]$. (Pienin siinä mielessä, että se $A \times A$:n osajoukkona sisältää mahdollisimman vähän alkioita.) Muodosta tämän ekvivalenssirelaation ekvivalenssiluokat eli joukko A:n ei-tyhjiä ja pistevieraita osajoukkoja joiden unioni on A siten, että alkiot x ja y kuuluvat samaan osajoukkoon jos ja vain jos $[x, y]$ kuuluu kyseiseen ekvivalenssirelaatioon.

P4. Olkoon Sur(m, n) surjektioden lukumäärä joukosta A joukkoon B kun joukossa A on m alkiota ja joukossa B on n alkiota. Jos konstruoit surjektiot $f : A \to B$ seuraavalla tavalla niin voit myös laskea montako niitä on:

(a) Kiinnitä jokin alkio $a_0 \in A$ ja valitse sen jälkeen $f(a_0)$. Monellako tavalla voit valita $f(a_0)$:n? Huomaa, että jokainen valinta antaa eri funktion.

(b) Seuraavaksi määrittelet funktion f joukossa $A \setminus \{a_0\}$. Nyt on kaksi toisiaan poissulkevaa tapausta:

(b-1) Jollekin $a_1 \neq a_0$ annat arvoksi $f(a_1) = f(a_0)$ jolloin f rajoitettuna joukkoon $A \setminus \{a_0\}$ eli funktio $f_{|A \setminus \{a_0\}}$ on surjektio: $A \setminus \{a_0\} \to B$. Montako tällaista surjektiota löytyy? Kirjoita vastauksesi Sur-funktion avulla.

(b-2) Kaikilla $a \in A \setminus \{a_0\}$ valitset $f(a)$:n siten, että pätee $f(a) \neq f(a_0)$ jolloin f rajoitettuna joukkoon $A \setminus \{a_0\}$ eli funktio $f_{|A \setminus \{a_0\}}$ on surjektio: $A \setminus \{a_0\} \to B \setminus \{f(a_0)\}$. Montako tällaista surjektiota löytyy? Kirjoita vastauksesi Sur-funktion avulla.

(c) Jos (a)- ja (b)-kohdan sekä tulo- ja summaperiaatteen avulla lasket Sur(m, n), niin minkä kaavan saat?

(d) Laske Sur$(4, 3)$ (c)-kohdan tuloksen avulla ottaen huomioon, että (tietenkin?) pätee Sur$(m, 1) = 1$ kun $m \geq 1$ ja Sur$(m, n) = 0$ kun $m < n$.

Vastaus: Sur$(4, 3) = 36$

P5. Jos X ja Y ovat ei-tyhjiä joukkoja ja $f : X \to Y$ on funktio niin voimme määritellä funktiot $f^{\to} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ ja $f^{\leftarrow} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ seuraavalla tavalla:

$$f^{\to}(A) = \{\, f(x) \in Y : x \in A \,\}, \quad A \in \mathcal{P}(X),$$
$$f^{\leftarrow}(B) = \{\, x \in X : f(x) \in B \,\}, \quad B \in \mathcal{P}(Y),$$

missä $\mathcal{P}(X)$ ja $\mathcal{P}(Y)$ ovat joukkojen X ja Y osajoukkojen muodostamat joukot.

(a) Osoita, että jos f on injektio niin $f^{\leftarrow}(f^{\to}(A)) = A$ kaikilla $A \subseteq X$.

(b) Osoita, että jos f ei ole injektio, niin on olemassa joukko $A \subseteq X$ siten, että $f^{\leftarrow}(f^{\to}(A)) \neq A$

Vihje: (a)-kohdassa on osoitettava, että $A \subseteq f^{\leftarrow}(f^{\to}(A))$ ja $f^{\leftarrow}(f^{\to}(A)) \subseteq A$ ja toinen näistä väitteistä seuraa suoraan määritelmästä eikä riipu siitä onko f injektio vai ei. (b)-kohdassa kannattaa valita joukoksi A joukko, johon kuuluu täsmälleen yksi alkio.

Huom! *Tavallisesti kirjoitetaan $f^{\to}$:n sijasta f ja usein $f^{\leftarrow}$:n sijasta f^{-1}.*