MS-A0207 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (Chem)
Yhteenveto ja esimerkkejä ym., osa I

G. Gripenberg

Aalto-yliopisto

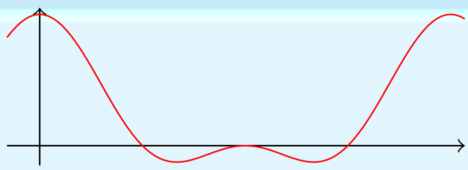
21. tammikuuta 2016

Vektoreista

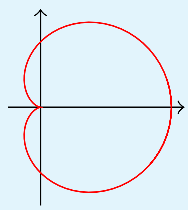
- $\mathbb{R}$ *on reaalilukujen joukko ja* $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{\, (x, y) : x, y \in \mathbb{R} \,\}$ *on* xy*-tason pisteitä.*
- *Jokaista pistettä tai paria* (x, y) *voimme käsitellä vektorina, jonka voimme myös esittää joko pystyvektorina* (2×1*-matriisina*) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, *vaakavektorina* ($1 \times 2$*-matriisina*) $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ *tai muodossa* $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ *(missä siis* $\mathbf{i}$ *on positiivisen* x*-akselin suuntainen yksikkövektori jne.)*
- *Jos* $\mathbf{u}$ *on vaakavektori* $\begin{bmatrix} u(1) & u(2) \end{bmatrix}$ *ja* $\mathbf{v}$ *on pystyvektori* $\begin{bmatrix} v(1) \\ v(2) \end{bmatrix}$ *niin niiden matriisitulo on* $\mathbf{uv} = u(1)v(1) + u(2)v(2)$. *Jos emme tee eroa vaaka- ja pystyvektoriden välillä voimme myös kirjoittaa tätä pistetulona (sisätulona, skalaaritulona)* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.
- *Vektorin pituuden määritelmäksi otamme* $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$.
- *Vektorit* $\mathbf{u}$ *ja* $\mathbf{v}$ *ovat kohtisuorassa tosiaan vastaan jos* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.
- $\mathbb{R}^d = \{\, (x_1, x_2, \ldots, x_d) : x_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, d \,\}$ *ja kun* $\mathbb{R}^2$ *korvataan* $\mathbb{R}^d$*:llä niin "ainoastaan" kuvien piirtäminen tulee vaikeammaksi.*

Funktioista

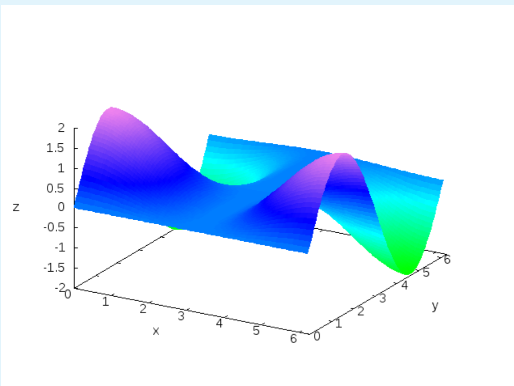
- $f(x) = (1 + \cos(x))\cos(x)$ *on yhden reaalimuuttujan reaaliarvoinen funktio (eli funktio:* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$*) jolla on kuvaaja:*



- *Funktio* $\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} (1 + \cos(t))\cos(t) \\ (1 + \cos(t))\sin(t) \end{bmatrix}$ *on yhden reaalimuuttujan vektoriarvoinen funktio (eli funktio:* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$*) jonka kuvajoukko on käyrä:*



- *Funktio* $h(x, y) = (1 + \cos(x))\sin(y)$ *on kahden reaalimuuttujan reaaliarvoinen funktio (eli funktio:* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*), jota voi myös käsitellä yhden vektorimuuttujan funktiona* $h\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = (1 + \cos(x))\sin(y)$ *ja jolla on seuraava kuvaaja:*



Huomaa, että f*:n kuvaaja on käyrä, jolla on parametriesitys* $t \mapsto \begin{bmatrix} t \\ (1 + \cos(t))\cos(t) \end{bmatrix}$.

Usean muuttujan vai vektorimuuttujan funktiot

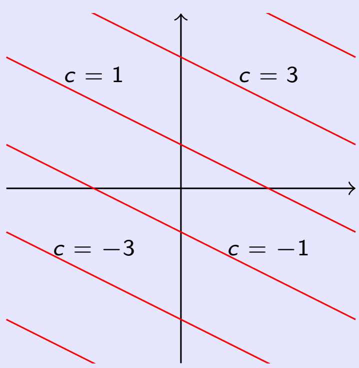
- *Funktio* $f : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *on "sääntö" tai "yhteys" (usein mutta ei suinkaan välttämättä, kaava) joka* **jokaiseen** *määrittelyjoukon* D *alkioon* $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ *liittää* **yksikäsitteisen** *"arvon"* $f(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}$.
- *Funktion* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ *arvot ovat vektoreita ja vektorin* $\mathbf{f}$ *jokainen komponentti on funktio:* $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *eli*

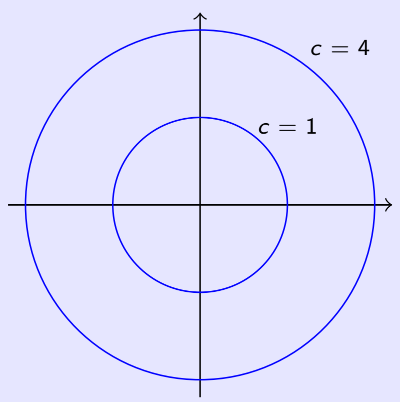
$$\mathbf{f}(x_1, \ldots, x_d) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_d) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_d) \end{bmatrix}$$

- *Usein voi olla hyödyllistä, että sen sijaan että käsittelemme funktiota* $f(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ *usean muuttujan funktiona käsittelemmen sitä yhden* **vektori***muuttujan* $\mathbf{x}$ *funktiona* $f(\mathbf{x})$ *missä vektorilla* $\mathbf{x}$ *on* d *komponenttia.*
- *Useimmiten otamme funktion argumentit pystyvektorina jolloin funktion derivaatta eli gradientti* *(kun funktio on reaaliarvoinen)* on *vaakavektori.*

Tasa-arvokäyrät

Jos $f(x, y)$ *on kahden muuttujan reaaliarvoinen funktio ja* $c \in \mathbb{R}$ *niin joukko* $\{\, (x, y) : f(x, y) = c \,\}$ *on usein käyrä (tai sitten käyrien unioni) eli funktion* **tasa-arvokäyrä***. Kuvio, jossa on piirrettynä monta tällaista tasa-arvokäyrää antaa tietynlaista informaatiota funktiosta.*
Funktion $f(x, y) = x + 2y$ *tasa-arvokäyrät ovat suoria kun taas funktion* $g(x, y) = x^2 + y^2$ *tasa-arvokäyrät ovat ympyröitä:*





Kolmen muuttujan tapauksessa saadaan vastaavasti **tasa-arvopintoja***.*

Muuttujat, parametrit, vakiot

Jos sylinterin muotoisella putkella on pituus L, sisähalkaisija r, seinämän paksuus h ja materiaalin tiheys on ρ niin putken massa

$$m = \rho \cdot L \cdot \pi\big((r+h)^2 - r^2\big).$$

Riippuen tilanteesta voimme tämän kaavan avulla määritellä erilaisia funktioita:

- $m = f(L) = \rho \cdot L \cdot \pi\big((r+h)^2 - r^2\big)$ *kun pidämme suureita ρ, r ja h parametreina, eli käsittelemme eripituisia putken pätkiä.*
- $m = f(L, r, h, \rho) = \rho \cdot L \cdot \pi\big((r+h)^2 - r^2\big)$ *missä meillä on neljä muuttujaa.*
- $m = f\left(\begin{bmatrix} L \\ r \\ h \end{bmatrix}\right) = \rho \cdot L \cdot \pi\big((r+h)^2 - r^2\big)$ *missä meillä on yhden vektorimuuttujan funktio ja pidämme ρ:ta parametrina.*

Kaikissa näissä tapauksissa pidämme π:tä vakiona mutta jos π:n paikalle sijoitetaan (epätarkka) likiarvo ja haluamme selvittää mikä on tämän approksimaation vaikutus voi syntyä tilanteita missä π:tä käsitellään muuttujana tai parametrina.

Muuttujat, parametrit, vakiot, jatk.

Jos käytämme `Matlab/Octavea` *voimme esimerkiksi kirjoittaa*

```
rho=7.87
f=@(L,r,h) rho*L*pi*((r+h)^2-r^2)
```

tai jos käytämme vektoriargumenttiä

```
rho=7.87
f=@(X) rho*X(1)*pi*((X(2)+X(3))^2-X(2)^2)
```

Huomaa, että jos muutamme `rho`*:n arvoa niin meidän pitää toistaa funktion* `f` *määritelmää!*

Raja-arvo, määritelmä I

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ *jos* $|f(x,y)-L|$ *on "pieni" aina kun* $\|(x,y)-(x_0,y_0)\| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ *on "riittävän pieni" ja* $(x,y) \neq (x_0,y_0)$.

Raja-arvo, määritelmä II

$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$ *jos* $|f(\mathbf{x})-L|$ *on "pieni" kun* $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|$ *on "riittävän pieni" ja* $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$.

Vektorin pituus

Vektorin $\mathbf{x}$ *pituus, kun sen komponentit ovat* $x_1, x_2, \ldots, x_d$*, on tässä* $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_d^2}$ *mutta raja-arvot eivät riipu siitä miten vektorin "pituus" on määritelty kunhan sillä on normaalit "pituuden" ominaisuudet.*

Raja-arvo, määritelmä III

$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0\\ x\in\Omega}} f(\mathbf{x}) = L$ *jos jokaisella* $\epsilon > 0$ *on olemassa* $\delta > 0$ *siten, että jos* $0 < \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| < \delta$ *ja* $\mathbf{x} \in \Omega$ *niin pätee* $|f(\mathbf{x})-L| < \epsilon$.

Raja-arvo, ominaisuudet

Jos $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = F$ *ja* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = G$ *niin pätee*

- $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \big(\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x})\big) = \alpha F + \beta G$,
- $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = FG$,
- $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{F}{G}$ *jos* $G \neq 0$.

Tästä seuraa, että raja-arvot, joiden määrittäminen on hankalaa ja näin ollen vaativat eniten työtä, ovat ne, joissa sijotus antaa tulokseksi $\frac{0}{0}$.

Raja-arvo, kuristusperiaate

- *Jos* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = 0$ *ja* $|f(\mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x})$ *(kun* $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$*) niin* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = 0$.
- *Jos* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} h(\mathbf{x}) = L$ *ja* $g(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x})$ *(kun* $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$*) niin* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$.

Kuristusperiaate

Jos meidän pitää määrittää raja-arvo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y^2}{x^4+y^2},$$

niin voimme yrittää käyttää kuristusperiaatetta jos arvelemme, että raja-arvo on 0 *ja silloin meidän pitää korvata* $\frac{5x^2y^2}{x^4+y^2}$ *suuremmalla funktiolla (kun olemme ottaneet itseisarvon, mikä tässä ei ole tarpeen) jolle on helpompaa osoittaa, että raja-arvo on* 0*. Voimme ensin todeta, että* $x^4 \geq 0$ *josta seuraa, että* $x^4 + y^2 \geq y^2$ *jolloin*

$$0 \leq \frac{5x^2y^2}{x^4+y^2} \leq \frac{5x^2y^2}{y^2} = 5x^2.$$

Nyt on selvää (?), että

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 5x^2 = \lim_{x\to 0} 5x^2 = 5\cdot 0^2 = 0,$$

ja näin ollen saamme kuristusperiaatteen nojalla

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y^2}{x^4+y^2} = 0.$$

Raja-arvo säteitä pitkin

Jos f *on yhden reaalimuuttujan funktio niin sillä on raja-arvo pisteessä* t_0 *jos ja vain jos oikean- ja vasemmanpuoliset raja-arvot ovat samat. Useamman muuttujan tapauksessa tilanne on osittain toinen:*

- *Jos raja-arvo* $\lim_{t\to 0+} f(x_0+\alpha t, y_0+\beta t)$ **ei** *ole riippumaton parametrien* α *ja* β *arvoista niin raja-arvo* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ **ei** *ole olemassa.*
- *Jos* $\lim_{t\to 0+} f(x_0+\alpha t, y_0+\beta t) = L$ *kaikilla* α *ja* β *joilla* $\alpha^2+\beta^2 > 0$ *niin tästä seuraa ainoastaan, että* **jos** *raja-arvo on olemassa niin se on* L*.*

Epäyhtälöitä ym.

- *Jos* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = F$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = G$ *ja* $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ *kun* $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ *niin pätee* $F \leq G$*.*
- *Jos* $\lim_{x\to x_0} f(x) = F$ *niin pätee* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x) = F$*.*
- *Jos* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = G$ *ja* $g(\mathbf{x}) \neq G$ *kun* $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ *niin pätee* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(g(\mathbf{x})) = \lim_{t\to G} f(t)$*.*

Esimerkki: Raja-arvo

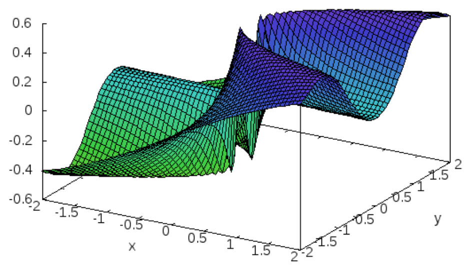
Jos haluamme määrittää raja-arvon $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$, *niin voimme laskea raja-arvon sädettä* $(\alpha t, \beta t)$ *pitkin ja kun määrittelemme* $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ *saamme*

$$\lim_{t\to 0+} f(\alpha t, \beta t) = \lim_{t\to 0+} \frac{\alpha t \beta^2 t^2}{\alpha^2 t^2 + \beta^4 t^4} = \lim_{t\to 0} t \frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2 + \beta^4 t^2} = 0$$

*Tästä seuraa (**ainoastaan!**), että **jos** raja-arvo on olemassa niin se on 0.*
Nyt osoittautuu, että raja-arvoa ei ole olemassa koska jos valitsemme $x = t^2$ *ja* $y = t$ *ja laskemme raja-arvon kun* $t \to 0+$

$$\lim_{t\to 0+} f(t^2, t) = \lim_{t\to 0+} \frac{t^2 t^2}{(t^2)^2 + t^4} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

josta seuraa ettei $f(x,y)$ *ole "lähellä" 0 jos* (x,y) *on "riittävän lähellä"* $(0,0)$.



Jatkuvat funktiot

- *Funktio* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *on* **jatkuva pisteessä** $\mathbf{x}_0$ *jos* $\mathbf{x}_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ *ja*

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0\\ \mathbf{x}\in\Omega}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$$

eli Ω *on* $\mathbb{R}^d$*:n osajoukko,* $\mathbf{x}_0$ *kuuluu joukkoon* Ω, $f(\mathbf{x}_0)$ *on määritelty, raja-arvo on olemassa ja se on* $f(\mathbf{x}_0)$.

- *Funktion* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *on* **jatkuva joukossa** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ *jos*

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0\\ \mathbf{x}\in\Omega}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) \quad \textit{kaikilla} \quad \mathbf{x}_0 \in \Omega.$$

eli jos se on jatkuva joukon Ω *jokaisessa pisteessä.*

Jatkuvat vektoriarvoiset funktiot

Funktio $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *on jatkuva pisteessä* $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, *(joukossa* Ω*), jos jokainen komponentti on jatkuva pisteessä* $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, *(joukossa* Ω*).*

Jatkuvien funktioiden summa, tulo ja osamäärä

Jos f ja $g : \Omega \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia joukossa $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ niin

- $\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x})$ *ja* $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ *ovat jatkuvia joukossa* Ω,
- $\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}$ *on jatkuva joukossa* $\{\, \mathbf{x} \in \Omega : g(\mathbf{x}) \neq 0 \,\}$.

Jatkuvien funktioiden yhdistetty funktio on jatkuva

Jos $g : \Omega_g \to \Omega_f$ ja $f : \Omega_f \to \mathbb{R}^m$, missä $\Omega_g \subseteq \mathbb{R}^d$ ja $\Omega_f \subseteq \mathbb{R}^p$, ovat jatkuvia määrittelyjoukoissaan niin funktio $(f \circ g)(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x}))$ on jatkuva joukossa Ω_g.

Huom!

Jos funktio $f(x,y)$ on jatkuva (esim. $\mathbb{R}^2$:ssa) niin funktio $x \mapsto f(x,y)$ on jatkuva kaikilla parametrin y arvoilla ja funktio $y \mapsto f(x,y)$ on jatkuva kaikilla parametrin x arvoilla.
Mutta jos ainoastaan oletamme, että funktio $x \mapsto f(x,y)$ on jatkuva kaikilla y ja funktio $y \mapsto f(x,y)$ on jatkuva kaikilla x niin tästä **ei** *välttämättä seuraa, että funktio $(x,y) \mapsto f(x,y)$ olisi jatkuva.*

Osittaisderivaatat

$$f_x(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$f_y(x,y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k}$$

Erilaisia merkintätapoja

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = D_x f = f_1 = D_1 f = D^{(1,0)} f \ldots$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = D^{(1,1)} f.$$

Derivoimisjärjestyksen vaihto

Oleta, että funktion $f(x,y)$ osittaisderivaatat $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$ ja $f_{yx}(x,y)$ ovat olemassa (ainakin) kaikissa pisteissä (x,y) joilla $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$ ja, että funktiot $f_{xy}(x,y)$ ja $f_{yx}(x,y)$ ovat jatkuvia pisteessä (x_0,y_0). Silloin pätee $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$.

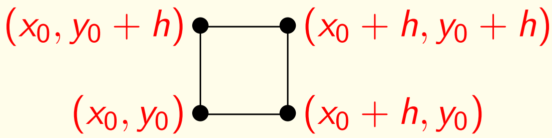
Todistus

Olkoon $0<h<\frac{\delta}{2}$ *ja määrittele funktiot u ja v siten, että*

$$u(x)=f(x,y_0+h)-f(x,y_0) \quad \text{ja} \quad v(y)=f(x_0+h,y)-f(x_0,y).$$

Funktio u on derivoituva välillä (x_0,x_0+h) ja jatkuva välillä $[x_0,x_0+h]$ ja näin ollen väliarvolauseesta seuraa, että on olemassa luku $\theta_1\in(0,1)$ siten, että

$$u(x_0+h)-u(x_0)=hu'(x_0+\theta_1 h).$$



$$u(x_0+h)-u(x_0)=v(y_0+h)-v(y_0)$$

Todistus, jatk.

Koska $hu'(x_0+\theta_1 h)=h(f_x(x_0+\theta_1 h,y_0+h)-f_x(x_0+\theta_1 h,y_0))$ voimme soveltaa väliarvolausetta vielä kerran funktioon $y\mapsto f_x(x_0+\theta_1 h,y)$ ja saamme

$$u(x_0+h)-u(x_0)=h^2 f_{xy}(x_0+\theta_1 h,y_0+\theta_2 h),$$

missä $\theta_2\in(0,1)$.
"Samalla tavalla" toteamme myös, että

$$v(y_0+h)-v(y_0)=h^2 f_{yx}(x_0+\theta_4 h,y_0+\theta_3 h),$$

missä θ_3 ja $\theta_4\in(0,1)$. Nyt $u(x_0+h)-u(x_0)=v(y_0+h)-v(y_0)$ koska molemmat lausekkeet ovat $f(x_0+h,y_0+h)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+h)+f(x_0,y_0)$ josta seuraa, että

$$h^2 f_{xy}(x_0+\theta_1 h,y_0+\theta_2 h)=h^2 f_{yx}(x_0+\theta_4 h,y_0+\theta_3 h).$$

Jos nyt jaamme h^2:lla, otamme raja-arvon kun $h\to 0$ ja käytämme hyväksi oletusta, että f_{xy} ja f_{yx} ovat jatkuvia, niin saamme väitteen $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$.

Derivaatta

Funktio $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ on derivoituva pisteessä $\mathbf{x}$ jos on olemassa (rivi)vektori, joka merkitään $f'(\mathbf{x})$:llä siten, että

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{|f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x})\mathbf{h}|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Tässä $f'(\mathbf{x})\mathbf{h}$ on $1 \times d$-rivivektorin $f'(\mathbf{x})$ ja $d \times 1$-sarakevektorin $\mathbf{h}$ matriisitulo, ja se voidaan myös esittää pistetulon muodossa $f'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}$ jos ei haluta tehdä eroa rivi- ja pystyvektorien välillä.
Muita usein käytettyjä derivaatan merkintöjä ovat $\nabla f(\mathbf{x})$ ja $\mathrm{D}f(\mathbf{x})$.

Derivaatta ja osittaisderivaatat

Jos funktiolla $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ on jatkuvat osittaisderivaatat niin f on derivoituva ja

$$f'(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) = \mathrm{D}f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_{x_1}(\mathbf{x}) & f_{x_2}(\mathbf{x}) & \dots & f_{x_d}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

"Jatkuvasti derivoituva" $\Leftrightarrow$ "Derivoituva ja derivaatta on jatkuva"

Esimerkki: Osittaisderivaattoja

Jos $f(x,y,z) = \ln\left(1 + e^{x+yz^2}\right)$ niin f:n osittaisderivaatat ovat seuraavat:

$$f_x(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x} \ln\left(1 + e^{x+yz^2}\right) = \frac{1}{1+e^{x+yz^2}}\, e^{x+yz^2},$$
$$f_y(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y} \ln\left(1 + e^{x+yz^2}\right) = \frac{1}{1+e^{x+yz^2}}\, e^{x+yz^2} z^2,$$
$$f_z(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x} \ln\left(1 + e^{x+yz^2}\right) = \frac{1}{1+e^{x+yz^2}}\, e^{x+yz^2} 2yz.$$

Näin ollen funktion f derivaatta eli gradientti on

$$\begin{aligned} f'(x,y,z) &= Df(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) \\ &= \left[\frac{1}{1+e^{x+yz^2}}\, e^{x+yz^2}, \frac{1}{1+e^{x+yz^2}}\, e^{x+yz^2} z^2, \frac{1}{1+e^{x+yz^2}}\, e^{x+yz^2} 2yz\right] \\ &= \frac{1}{1+e^{x+yz^2}}\, e^{x+yz^2}\, \mathbf{i} + \frac{1}{1+e^{x+yz^2}}\, e^{x+yz^2} z^2\, \mathbf{j} + \frac{1}{1+e^{x+yz^2}}\, e^{x+yz^2} 2yz\, \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Vektoriarvoisen funktion derivaatta

Funktio $\mathbf{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ *on derivoituva pisteessä* $\mathbf{x}$ *jos jokainen komponentti on derivoituva pisteessä* $\mathbf{x}$, *eli on olemassa* $m \times d$ *matriisi* $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ *siten, että*

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Matriisin $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ *rivivektorit ovat vektorin* $\mathbf{f}$ *komponenttien derivaatat ja* $\mathbf{f}'(\mathbf{x})(i,j) = \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$. *(Tätä matriisia kutsutaan usein Jacobin matriisiksi.)*

Ketjusääntö

Jos $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ *missä* $\mathbf{f}$ *ja* $\mathbf{g}$ *ovat derivoituvia niin pätee*

$$\mathbf{h}'(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\mathbf{g}'(\mathbf{x}).$$

Huomaa, että tässä oletetaan, että $\mathbf{x}$, $\mathbf{g}$ *ja* $\mathbf{f}$ *ovat sarakevektoreita (mahdollisesti vain yhdellä komponentilla) ja on tärkeätä että ketjusääntö kirjoitetaan järjestyksessä* $\mathbf{f}'(\mathbf{g})\mathbf{g}'$ *koska jos* $\mathbf{g} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ *ja* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ *niin* $\mathbf{f}'$ *on* $m \times p$*-matriisi ja* $\mathbf{g}'$ *on* $p \times d$*-matriisi jolloin matriisitulo* $\mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\mathbf{g}'(\mathbf{x})$ *on hyvin määritelty.*

Suunnattu derivaatta

Funktion f *suunnattu derivaatta pisteessä* $\mathbf{x}$ *suuntaan* $\mathbf{u}$ *on funktion* $t \mapsto f(\mathbf{x} + t\frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u})$ *derivaatta pisteessä* 0 *ja on näin ollen*

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})\mathbf{u}\frac{1}{\|\mathbf{u}\|} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \left(\frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u}\right),$$

ja se kertoo miten nopeasti funktio f *kasvaa tai vähenee kun kuljetaan pisteestä* $\mathbf{x}$ *suuntaan* $\mathbf{u}$.
Huomaa, että $D_{\mathbf{i}}f(x,y,z) = f_x(x,y,z)$, $D_{\mathbf{j}}f(x,y,z) = f_y(x,y,z)$ *ja* $D_{\mathbf{k}}f(x,y,z) = f_z(x,y,z)$, *eli osittaisderivaatat ovat suunnatut derivaatat koordinaattiakselien (positiivisiin) suuntiin.*

Mihin suuntaan osoittaa gradientti?

Suunnattu derivaatta $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})$ *pisteessä* $\mathbf{x}$ *on suurimmillaan kun* $\mathbf{u} \upuparrows Df(\mathbf{x})$ *(ja pienin vastakkaiseen suuntaan) joten* **funktio kasvaa nopeimmin gradientin suuntaan**.
Suunnattu derivaatta on 0 *kun* $\mathbf{u} \perp Df(\mathbf{x})$ *joten* **gradientti on kohtisuorassa tasa-arvokäyriä (tai -pintoja) kohti.**

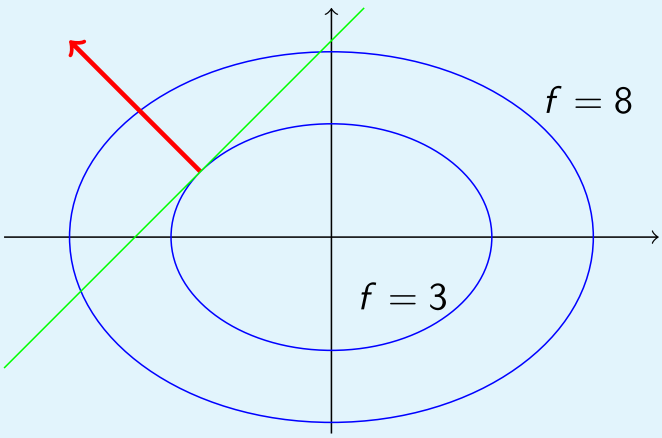
Esimerkki: Gradientti ja tasa-arvokäyrä

Jos $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2$ *niin sen gradientti eli eli derivaatta on*

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} x & 2y \end{bmatrix} = x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j}$$

ja erityisesti pisteessä $(-2,1)$ *gradientti on* $-2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$*. Funktion pisteen* $(-2,1)$ *kautta kulkeva tasa-arvokäyrä on (ellipsi)* $\{\,(x,y) : \frac{1}{2}x^2 + y^2 = 3\,\}$ *ja alla olevasta kuviosta nähdään, että gradientti on kohtisuorassa tasa-arvokäyrää ja sen tangenttia pisteessä* $(-2,1)$ *vastaan.*

Koska gradientti pisteessä $(2,1)$ *on* $-2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$ *niin tätä vastaan kohtisuorassa olevan, pisteen* $(-2,1)$ *kautta kulkevan suoran suuntavektori on* $2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$ *jolloin tämän suoran yhtälö on* $y - 1 = x + 2$ *eli* $y = x + 3$.



Derivaatta ja koordinaattisysteemi

Edellä annetun määritelmän mukaan esimerkiksi funktion $f(x,y) = xy$ *derivaatta eli gradientti on* $\mathbf{f}'(x,y) = \begin{bmatrix} y & x \end{bmatrix} = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$*, mutta tässä määritelmässä meillä on oletuksena, että koordinaattisysteemi on kiinnitetty. Jos valitsemme toisen, st-koordinaattisysteemin, esimerkiksi* (*kiertämällä* xy*-systeemin koordinaattiakseleita* 45°) *siten, että*

$$\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x + y \\ y - x \end{bmatrix},$$

niin $f(s,t) = \frac{1}{2}(s^2 - t^2)$ *ja* $f'(s,t) = \begin{bmatrix} s & -t \end{bmatrix} = s\,\mathbf{u} - t\,\mathbf{v}$ *missä* $\mathbf{u}$ *ja* $\mathbf{v}$ *ovat s- ja t-akselien suuntaisia kantavektoreita, eli* $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$ *ja* $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{j} - \mathbf{i})$.

Näin ollen voimme todeta, että derivaatta pisteessä $\mathbf{x}$ *"oikeasti" on lineaarikuvaus* $\mathbf{h} \mapsto f'(\mathbf{x})\mathbf{h}$ *ja tämän lineaarikuvauksen matriisiesitys (jota sitten käytetään laskuissa) riippuu käytetystä koordinaattisysteemistä.*

Samalla tavalla voimme sanoa, että funktion $g(x) = x^2$ *derivaatta pisteessä* $x = 2$ *ei ole luku* $g'(2) = 4$ *vaan lineaarikuvaus "neljällä kertominen":* $t \mapsto 4t$.

Derivaatan tulosääntö ketjusäännön avulla

Derivaatan tulosääntö sanoo tunnetusti, että $(fg)' = f'g + fg'$.
Vaihtoehtoinen lähestymistapa on seuraava: Kirjoita $p(t) = f(t)g(t)$ *yhdistettynä funktiona* $p(t) = (h \circ k)(t) = h(k(t))$ *missä* $h : \mathbb{R}^2 \to R$ *on* $h\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = xy$ *ja* $k(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}$. *Derivaatan määritelmän nojalla*

$$h'\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y & x \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad k'(t) = \begin{bmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{bmatrix}.$$

Ketjusäännön mukaan pätee silloin

$$p'(t) = h'(k(t))k'(t) = \begin{bmatrix} g(t) & f(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{bmatrix} = g(t)f'(t) + f(t)g'(t).$$

Laplacen yhtälö $u_{xx} + u_{yy} = 0$ napakoordinaateissa

Oletamme, että u toteuttaa ns. Laplacen yhtälön $u_{xx} + u_{yy} = 0$ *ja tehtävänä on selvittää minkä yhtälön funktio* $v(r, \theta) = u(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ *toteuttaa. (Tässä siis v on funktio u esitettynä napakoordinaattien funktiona).*
Osittaisderivaattoja laskemalla (ja ketjusääntöä hyväksi käyttäen) toteamme, että

$$\begin{aligned} v_r(r,\theta) &= u_x(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\cos(\theta) + u_y(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\sin(\theta), \\ v_\theta(r,\theta) &= u_x(r\cos(\theta), r\sin(\theta))(-r\sin(\theta)) + u_y(r\cos(\theta), r\sin(\theta))r\cos(\theta). \end{aligned}$$

Osoittautuu, että meidän ei tarvitse laskea $v_{r\theta} = v_{\theta r}$ *(mutta tämä ei ole lainkaan etukäteen selvää) mutta sen sijaan meidän pitää laskea*

$$\begin{aligned} v_{rr}(r,\theta) = u_{xx}&(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\cos(\theta)^2 \\ &+ 2u_{xy}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\cos(\theta)\sin(\theta) \\ &+ u_{yy}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\sin(\theta)^2, \end{aligned}$$

Laplacen yhtälö napakoordinaateissa, jatkuu

ja

$$\begin{aligned} v_{\theta\theta}(r,\theta) &= u_{xx}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))r^2\sin(\theta)^2 \\ &\quad + 2u_{xy}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))(-r^2\cos(\theta)\sin(\theta)) \\ &\quad + u_{yy}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))r^2\cos(\theta)^2 \\ &\quad - u_x(r\cos(\theta), r\sin(\theta))r\cos(\theta)) - u_y(r\cos(\theta), r\sin(\theta))r\sin(\theta). \end{aligned}$$

Oletuksen mukaan $u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$, *erityisesti*

$$u_{xx}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + u_{yy}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = 0,$$

ja tämän sekä kaavan $\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$ *avulla näemme, että*

$$v_{rr}(r,\theta) + \frac{1}{r}v_r(r,\theta) + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta}(r,\theta) = 0$$

Esimerkki: Suunnatut derivaatat

Jos funktio f *on kolmen muuttujan derivoituva funktio ja en suunnatut derivaatat pisteessä* $\mathbf{x}_0$ *suuntiin* $\mathbf{u}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{j} - \mathbf{k}$ *ja* $\mathbf{u}_3 = -\mathbf{i} + \mathbf{k}$ *ovat* 1, 2 *ja* 3 *niin voimme määrittää derivaatan pisteessä* $\mathbf{x}_0$ *koska vektorit* $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ *ja* $\mathbf{u}_3$ *ovat lineaarisesti riippumattomia (eli erisuuntaisia): Oletamme, että* $f'(\mathbf{x}_0) = A\,\mathbf{i} + B\,\mathbf{j} + C\,\mathbf{k}$ *jolloin suunnatun derivaatan määritelmän nojalla saamme yhtälösysteemin*

$$\begin{aligned} 1 &= D_{\mathbf{u}_1}f(\mathbf{x}_0) = (A\,\mathbf{i} + B\,\mathbf{j} + C\,\mathbf{k})\cdot(\mathbf{i}+\mathbf{j})\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}A + \frac{1}{\sqrt{2}}B, \\ 2 &= D_{\mathbf{u}_2}f(\mathbf{x}_0) = (A\,\mathbf{i} + B\,\mathbf{j} + C\,\mathbf{k})\cdot(\mathbf{j}-\mathbf{k})\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}B - \frac{1}{\sqrt{2}}C, \\ 3 &= D_{\mathbf{u}_3}f(\mathbf{x}_0) = (A\,\mathbf{i} + B\,\mathbf{j} + C\,\mathbf{k})\cdot(-\mathbf{i}+\mathbf{k})\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}A + \frac{1}{\sqrt{2}}C. \end{aligned}$$

Matriisimuodossa tämä systeemi ja sen ratkaisu ovat

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Esimerkki: Ketjusääntö ja virtausmekaniikka

Oletamme, että neste virtaa tasossa siten, että nopeus pisteessä (x, y) *hetkellä* t *on* $u(x, y, t)\mathbf{i} + v(x, y, t)\mathbf{j}$. *Jos nyt haluamme määrittää hetkellä* t *pisteessä* (x, y) *sijaitsevan "nestepartikkelin" kiihtyvyys niin ensin oletamme, että partikkelin sijainti hetkellä* t *on* $(X(t), Y(t))$ *(jolloin siis* $X(t) = x$ *ja* $Y(t) = y$ *jos se on pisteessä* (x, y) *hetkellä* t*). Silloin nopeus on* $X'(t)\,\mathbf{i} + Y'(t)\,\mathbf{j}$, *josta seuraa, että* $X'(t) = u(X(t), Y(t), t)$ *ja* $Y'(t) = v(X(t), Y(t), t)$. *Kiihtyvyys taas on* $X''(t)\,\mathbf{i} + Y''(t)\,\mathbf{j}$ *ja ketjusäännön nojalla*

$$\begin{aligned}
X''(t) &= u_x(X(t), Y(t), t)X'(t) + u_y(X(t), Y(t), t)Y'(t) \\
&\qquad + u_t(X(t), Y(t), t) \\
&= u_x(X(t), Y(t), t)u(X(t), Y(t), t) + u_y(X(t), Y(t), t)v(X(t), Y(t), t) \\
&\qquad + u_t(X(t), Y(t), t) \\
&= u_x(x, y, t)u(x, y, t) + u_y(x, y, t)v(x, y, t) + u_t(x, y, t),
\end{aligned}$$

missä viimeisellä rivillä käytimme oletusta $x(t) = x$ *ja* $Y(t) = y$.

Esimerkki: Ketjusääntö ja virtausmekaniikka, jatk.

Samalla tavalla saamme

$$Y''(t) = v_x(x, y, t)u(x, y, t) + v_y(x, y, t)v(x, y, t) + v_t(x, y, t).$$

Näin ollen kiihtyvyys on

$$\begin{aligned}
&\big(u_x(x, y, t)u(x, y, t) + u_y(x, y, t)v(x, y, t) + u_t(x, y, t)\big)\,\mathbf{i} \\
&\qquad + \big(v_x(x, y, t)u(x, y, t) + v_y(x, y, t)v(x, y, t) + v_t(x, y, t)\big)\,\mathbf{j}.
\end{aligned}$$

Huomaa, että tämä on epälineaarinen lauseke eli jos u *korvataan* $u_1 + u_2$*:lla ja samoin* v *korvataan* $v_1 + v_2$*:lla niin tulos ei ole kahden lausekkeen summa missä toisessa esiintyy* u_1 *ja* v_1 *ja toisessa* u_2 *ja* v_2. *Suuri osa virtausmekaniikan hankaluuksista on seuraus tästä epälineaarisuudesta.*

Milloin pätee $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{y})\| \le C\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ kun kun $\|x\|, \|y\| \le \rho$?

Jos $\mathbf{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ *on jatkuvasti derivoituva, niin jokainen komponentti* f_j, $1 \le j \le m$, *on jatkuvasti derivoituva ja löytyy luvut* c_j *siten, että* $\|f_j'(\mathbf{v})\| \le C$ *kun* $\|\mathbf{v}\| \le \rho$. *Jos nyt* $\mathbf{x}$ *ja* $\mathbf{y}$ *ovat sellaisia, että* $\|\mathbf{x}\| \le \rho$ *ja* $\|\mathbf{y}\| \le \rho$ *niin määritellään funktio* h *kaavalla* $h_j(t) = f_j((1-t)\mathbf{y} + t\mathbf{x})$. *Silloin* h_j *on derivoituva reaaliarvoinen funktio ja väliarvolauseen nojalla*

$$f_j(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{y}) = h_j(1) - h_j(0) = h_j'(t_j)(1-0),$$

missä $t_j \in (0,1)$. *Ketjusäännön nojalla*

$$h_j'(t_j) = f_j'((1-t_j)\mathbf{y} + t_j\mathbf{x})(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

joten

$$|f_j(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{y})| = |h_j(1) - h_j(0)| \le \|f_j'((1-t_j)\mathbf{y} + t_j\mathbf{x})\| \, \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \le c_j\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|,$$

koska $\|(1-t_j)\mathbf{y} + t_j\mathbf{x})\| \le (1-t_j)\|\mathbf{y}\| + t_j\|\mathbf{x}\| \le \rho$. *Näin ollen* $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \le C\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ *missä* $C = \sqrt{c_1^2 + \ldots + c_m^2}$.

Milloin pätee $\|\mathbf{g}(\mathbf{x})-\mathbf{g}(\mathbf{y})\| \ge c\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ kun kun $\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{y}\| \le \rho$?

Ei välttämättä jos $d > 1$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *on jatkuvasti derivoituva,* $\rho > 0$ *ja* $\|\mathbf{g}'(\mathbf{v})\mathbf{u}\| > 0$ *kun* $\|\mathbf{v}\| \le \rho$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ *ja* $\|\mathbf{u}\| = 1$ *kuten seuraava esimerkki näyttää:*

Olkoon $\mathbf{g}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi s}{\rho}} \cos(\frac{2\pi t}{\rho}) \\ e^{\frac{2\pi s}{\rho}} \sin(\frac{2\pi t}{\rho}) \end{bmatrix}$ *kun* $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$. *Silloin*

$$\mathbf{g}'(\mathbf{v}) = \frac{2\pi}{\rho} \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi s}{\rho}} \cos(\frac{2\pi t}{\rho}) & -e^{\frac{2\pi s}{\rho}} \sin(\frac{2\pi t}{\rho}) \\ e^{\frac{2\pi s}{\rho}} \sin(\frac{2\pi t}{\rho}) & e^{\frac{2\pi s}{\rho}} \cos(\frac{2\pi t}{\rho}) \end{bmatrix},$$

Jos $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ *niin*

$$\mathbf{g}'(\mathbf{v})\mathbf{u} = \frac{2\pi}{\rho} e^{\frac{2\pi s}{\rho}} \begin{bmatrix} \cos(\frac{2\pi t}{\rho})u_1 - \sin(\frac{2\pi t}{\rho})u_2 \\ \sin(\frac{2\pi t}{\rho})u_1 + \cos(\frac{2\pi t}{\rho})u_2 \end{bmatrix},$$

Milloin pätee $\|\mathbf{g}(\mathbf{x})-\mathbf{g}(\mathbf{y})\| \geq c\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ kun kun $\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{y}\| \leq \rho$? jatk.

joten

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{g}'(\mathbf{v})\mathbf{u}\right\|^2 = \tfrac{4\pi^2}{\rho^2}\mathrm{e}^{\frac{4\pi x}{\rho}} \Big(&\cos(\tfrac{2\pi t}{\rho})^2 u_1^2 - 2\cos(\tfrac{2\pi t}{\rho})\sin(\tfrac{2\pi t}{\rho})u_1u_2 \\ &+ \sin(\tfrac{2\pi t}{\rho})^2 u_2^2 + \sin(\tfrac{2\pi t}{\rho})^2 u_1^2 \\ &+ 2\cos(\tfrac{2\pi t}{\rho})\sin(\tfrac{2\pi t}{\rho})u_1u_2 + \cos(\tfrac{2\pi t}{\rho})^2 u_2^2\Big) = \mathrm{e}^{2x}\|\mathbf{u}\|^2.\end{aligned}$$

Tästä päättelemme, että jos $\|\mathbf{v}\| \leq \rho$, *niin* $s \geq -\rho$ *ja*

$$\left\|\mathbf{g}'(\mathbf{v})\mathbf{u}\right\| \geq \frac{2\pi}{\rho}\mathrm{e}^{-2\pi}\|\mathbf{u}\|,$$

kaikilla vektoreilla $\mathbf{u}$. *Jos nyt* $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ *ja* $\mathbf{y} = \begin{bmatrix}0\\\rho\end{bmatrix}$ *niin* $\mathbf{g}(\mathbf{x})-\mathbf{g}(\mathbf{y}) = 0$.

Lineaarinen approksimointi

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) \approx f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})\mathbf{h} = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})\cdot\mathbf{h},$$

tai toisella tavalla esitettynä

$$\begin{aligned}&f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z) \\ &\qquad\approx f_x(x,y,z)\Delta x + f_y(x,y,z)\Delta y + f_z(x,y,z)\Delta z.\end{aligned}$$

Tangenttitaso

Koska gradientti on kohtisuorassa tasa-arvopintoja kohti niin pinnan $f(x,y,z) = c$ *normaali pisteessä* (x_0,y_0,z_0) *on*

$$f'(x_0,y_0,z_0) = f_x(x_0,y_0,z_0)\mathbf{i} + f_y(x_0,y_0,z_0)\mathbf{j} + f_z(x_0,y_0,z_0)\mathbf{k},$$

ja pinnan tangenttitasolla pisteessä (x_0,y_0,z_0) *on yhtälö*

$$f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0$$

Esimerkki: Tangenttitaso

Jos haluamme määrittää funktion $f(x,y) = x^2 - y^2$ *kuvaajan tangenttitason kun* $x = 2$ *ja* $y = 1$ *niin kirjoitamme ensin yhtälön muodossa* $z = x^2 - y^2$ *eli* $g(x,y,z) = 0$ *missä* $g(x,y,z) = x^2 - y^2 - z$ *(vaikka se voisi yhtä hyvin olla* $g(x,y,z) = -x^2 + y^2 + z$*). Funktion g derivaatta on* $Dg(x,y,z) = 2x\,\mathbf{i} - 2y\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$ *ja pisteessä* $(2,1,f(2,1)) = (2,1,3)$ *tämä derivaatta on* $\mathbf{n} = 4\,\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$*. Tämä vektori on pinnan* $g(x,y,z) = 0$ *normaali pisteessä* $(2,1,3)$ *ja samalla pinnan tässä pisteessä otetun tangenttitason normaali. Koska* $(2,1,3)$ *on tangenttitason piste niin* $\mathbf{v} = (x-2)\,\mathbf{i} + (y-1)\,\mathbf{j} + (z-3)\,\mathbf{k}$ *on tangenttitason suuntainen vektori jos* (x,y,z) *on myös tangenttitason piste. Näin ollen* $\mathbf{v}$ *on kohtisuorassa normaalia* $\mathbf{n}$ *vastaan eli* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ *ja tästä ehdosta saamme tangenttitason yhtälön*

$$4(x-2) - 2(y-1) - (z-3) = 0 \quad \text{eli} \quad 4x - 2y - z = 3.$$

Lineaarinen approksimointi ja suhteelliset virheet, erikoistapaus

Jos

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n},$$

niin lineaarisella approksimoinnilla saadaan

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} \approx \alpha_1 \frac{\Delta x_1}{x_1} + \alpha_2 \frac{\Delta x_2}{x_2} + \dots + \alpha_n \frac{\Delta x_n}{x_n},$$

ja erityisesti

$$\left|\frac{\Delta f}{f}\right| \lesssim |\alpha_1| \left|\frac{\Delta x_1}{x_1}\right| + |\alpha_2| \left|\frac{\Delta x_2}{x_2}\right| + \dots + |\alpha_n| \left|\frac{\Delta x_n}{x_n}\right|.$$

Lineaarinen approksimointi, suhteellinen virhe

Jos meidän pitää arvioida virhettä, joka syntyy kun ympyräkartion tilavuus lasketaan kaavalla $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ *ja tiedämme ainoastaan, että säteen* r *mitatun arvon virhe on korkeintaan* 3% *ja korkeuden* h *mitatun arvon virhe on korkeintaan* 2% *niin emme saa absoluuttista ylärajaa tilavuuden virheelle mutta saamme helposti approksimatiivisen ylärajan suhteelliselle virheelle seuraavalla tavalla: Lineaarisen approksimoinnin perusteella:*

$$\Delta V = V(r+\Delta r, h+\Delta h) - V(r,h) \approx V_r(r,h)\Delta r + V_h(r,h)\Delta h,$$

josta seuraa, että

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{\frac{1}{3}2\pi r h \Delta r}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} + \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 \Delta h}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = 2\cdot\frac{\Delta r}{r} + 1\cdot\frac{\Delta h}{h}.$$

Koska oletamme, että $|\frac{\Delta r}{r}| \le 0.03$ *ja* $|\frac{\Delta h}{h}| \le 0.02$ *niin*

$$\left|\frac{\Delta V}{V}\right| \lesssim 2\cdot 0.03 + 1\cdot 0.02 = 0.08,$$

eli suhteellinen virhe on korkeintaan 8%.

Esimerkki: Lineaarinen approksimointi

Sylinterimäisen säiliön sisältämä nestemäärä, kun säiliön akseli on vaakasuorassa on $V = L(r^2 \arccos(1-\frac{h}{r}) - (r-h)\sqrt{2hr-h^2})$ *missä* L *on säiliön pituus, joka on noin 2 m,* r *on säde, joka on noin* 50 cm *ja* h *on nestepinnan korkeus, joka myös on noin* 50 cm. *Pituuden* L *ja säteen* r *pystymme mittaamaan* 1 cm *tarkkuudella. Miten tarkasti meidän on mitattava* h *jotta saisimme nestemäärän lasketuksi* 50 *litran tarkkuudella?*
Määrittelemme

$$f(L,r,h) = L\Big(r^2\arccos(1-\frac{h}{r}) - (r-h)\sqrt{2hr-h^2}\Big).$$

Silloin (funktion $\arccos(t)$ *derivaatta on* $-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$*)*

$$f_L(L,r,h) = \big(r^2\arccos(1-\frac{h}{r}) - (r-h)\sqrt{2hr-h^2}\big)$$

$$f_r(L,r,h) = 2Lr\arccos(1-\frac{h}{r}) - Lr^2\frac{1}{\sqrt{1-(1-\frac{h}{r})^2}}\frac{h}{r^2} - L\sqrt{2hr-h^2}$$

$$- L(r-h)\frac{h}{\sqrt{2hr-h^2}},$$

Esimerkki: Lineaarinen approksimointi, jatk.

$$f_h(L,r,h) = Lr^2 \frac{1}{\sqrt{1-\left(1-\frac{h}{r}\right)^2}} \cdot \frac{1}{r} + L\sqrt{2hr-h^2}$$
$$- L(r-h)\frac{r-h}{\sqrt{2hr-h^2}},$$

ja erityisesti

$$f_L(200,50,50) = \frac{\pi}{2} \cdot 2500 \approx 3927$$
$$f_r(200,50,50) = \frac{\pi}{2} \cdot 20000 - 10000 - 10000 \approx 11416,$$
$$f_h(200,50,50) = 10000 + 10000 = 20000.$$

Lineaarisella approksimoinnilla saamme

$$\Delta f \approx f_L \Delta L + f_r \Delta r + f_h \Delta h.$$

Esimerkki: Lineaarinen approksimointi, jatk.

josta seuraa, että

$$|\Delta f| \lesssim |f_L||\Delta L| + |f_r||\Delta r| + |f_h||\Delta h| \le 3927 \cdot 1 + 11416 \cdot 1 + 20000 \cdot |\Delta h|$$

koska $|\Delta L| \le 1$ *ja* $|\Delta r| \le 1$*. Jos nyt haluamme, että* $|\Delta f| \le 50 \cdot 10^3$ *niin meidän täytyy vaatia, että*

$$3927 \cdot 1 + 21416 \cdot 1 + 20000 \cdot |\Delta h| \le 50000,$$

ja tästä seuraa, että pitää olla $|\Delta h| \le 2.4$.

Huom

Tässä kuten muissa vastaavissa laskuissa ΔL *on "virhe" tai "poikkeama" muuttujan* L *arvossa, eli* $\Delta L = L - L_0$ *mutta* Δ*:lla merkitään myös Laplacen differentiaalioperaattoria:* $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$.

Esimerkki: Lineaarinen approksimointi

Funktiosta f tiedämme, että $f(3,2) = 2.7$, $f(3.1, 2.2) = 2.75$ ja $f(2.9, 2.1) = 2.68$. Nyt voimme seuraavalla tavalla arvioida derivaattaa käyttäen mikä on $f(3.2, 1.9)$:
Lineaarisella approksimoinnilla saamme

$$f(3 + \Delta x, 2 + \Delta y) \approx f(3,2) + f_x(3,2)\Delta x + f_y(3,2)\Delta y.$$

Jos ensin valitsemme $\Delta x = 0.1$ ja $\Delta y = 0.2$ ja sitten $\Delta x = -0.1$ ja $\Delta y = 0.1$ niin saamme "yhtälösysteemin"

$$\begin{aligned} 2.75 &= f((3 + 0.1, 2 + 0.2) \approx 2.7 + f_x(3,2) \cdot 0.1 + f_y(3,2) \cdot 0.2, \\ 2.68 &= f(3 - 0.1, 2 + 0.1) \approx 2.7 + f_x(3,2) \cdot (-0.1) + f_y(3,2) \cdot 0.1, \end{aligned}$$

eli

$$\begin{aligned} 0.5 &\approx f_x(3,2) + 2f_y(3,2), \\ -0.2 &\approx -f_x(3,2) + f_y(3,2). \end{aligned}$$

Esimerkki: Lineaarinen approksimointi, jatk.

Laskemalla yhteen saamme ensin $f_y(3,2) \approx 0.1$ ja sitten sijoittamalla tämän tuloksen ensimmäiseen yhtälöön saamme $f_x(3,2) \approx 0.5 - 0.2 = 0.3$. Jos nyt valitsemme $\Delta x = 0.2$ ja $\Delta y = -0.1$ niin lineaarisella approksimoinnilla saamme

$$\begin{aligned} f(3.2, 1.9) &= f(3 + 0.2, 2 - 0.1) \\ &\approx f(3,2) + f_x(3,2) \cdot 0.2 + f_y(3,2) \cdot (-0.1) \\ &\approx 2.7 + 0.3 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot (-0.1) \\ &= 2.7 + 0.06 - 0.01 = 2.75. \end{aligned}$$

Huomaa, että tässä virhelähteenä on myös epätarkkuudet osittaisderivaattojen arvoissa.

Differentiaali??

Sanomme, että

$$\psi = a(x,y)\,\mathrm{d}x + b(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

on 1. kertaluvun differentiaalimuoto (tai differentiaalimuotokenttä koska kertoimet a ja b ovat muuttujien x ja y funktioita) tai lyhyemmin vain differentiaali. Tässä 1. kertaluvun tapauksessa voimme pitää $\mathrm{d}x$ *symbolina, jota vastaa x-akselin suuntaista yksikkövektoria ja samoin* $\mathrm{d}y$ *symbolina jota vastaa y-akselin suuntaista yksikkövektoria jolloin differentiaalia ψ vastaa vektorifunktio* $\begin{bmatrix} a(x,y) & b(x,y) \end{bmatrix}$.

Tällaista differentiaalia voimme (kunhan kertoimet ovat esim. jatkuvia) integroida käyrää pitkin: Jos $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$, $t \in [a,b]$ on suunnatun käyrän $\mathcal{C}$ parametriesitys (ja funktiot $x(t)$ ja $y(t)$ ovat esim. paloittain jatkuvasti derivoituvia) niin

$$\int_{\mathcal{C}} \psi = \int_a^b \big(a(x(t),y(t))x'(t) + b(x(t),y(t))y'(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Differentiaali??, jatk.

Jos nyt $a(x,y) = f_x(x,y)$ ja $b(x,y) = f_y(x,y)$ niin ketjusäännön nojalla integroitavana on derivaatta jolloin saamme integraalin suoraan sijoittamalla ja

$$\int_{\mathcal{C}} \psi = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)) = f(\mathcal{C}\text{:n loppupiste}) - f(\mathcal{C}\text{:n alkupiste}).$$

Jos siis $a(x,y) = f_x(x,y)$ ja $b(x,y) = f_y(x,y)$ niin kirjoitamme $\psi = \mathrm{d}f$, sanomme, että ψ on funktion f kokonaisdifferentiaali ja

$$\mathrm{d}f = f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y,$$

ja tämän vastine on approksimointikaavaa

$$\Delta f \approx f_x\Delta x + f_y\Delta y.$$

Mutta jos ei päde $a(x,y) = f_x(x,y)$ ja $b(x,y) = f_y(x,y)$ jollain funktiolla f niin $\int_{\mathcal{C}}\psi$ on edelleen laskettavissa mutta tulos ei enää riipu pelkästään differentiaalista ψ ja käyrän päätepisteistä vaan myös siitä miten käyrä kulkee alkupisteestä loppupisteeseen.

Newtonin menetelmä: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = ?$

Jos $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ *niin pätee*

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \Delta\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)\Delta\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \Delta\mathbf{x} \approx -\mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$$

ja jotta $\mathbf{x}_{n+1} \approx \mathbf{x}_n + \Delta\mathbf{x}$ *valitsemme*

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_n).$$

Käänteismatriisin $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)^{-1}$ *laskeminen ei ole välttämätöntä mutta meidän pitää ratkaista yhtälösysteemi* $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$.

Milloin Newtonin menetelmä suppenee?

Jos $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *on jatkuvasti derivoituvia,* $\mathbf{f}(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0}$, $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_*)$ *on kääntyvä matriisi ja jos* $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_*\|$ *on riittävän pieni (mille voi antaa riittävä ehto) niin pätee* $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_*$, *mutta muuten ei ole takeita siitä, että menetelmä konvergoi ja vaikeus on löytää sopiva alkuarvo (ja tietää milloin pitää luovuttaa jos näyttää siltä ettei menetelmä konvergoikaan).*

Newtonin menetelmä

Jos haluamme käyttää Newtonin mentelmää yhtälösysteemin $x^2 + 4y^2 = 4$, $x^2 - 2x = y - 1$ *ratkaisemiseksi niin kirjoitamme ensin systeemin muodossa* $\mathbf{f}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$, *missä siis*

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} x^2 + 4y^2 - 4 \\ x^2 - 2x - y + 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Silloin

$$\mathbf{f}'(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 2x & 8y \\ 2x - 2 & -1 \end{bmatrix},$$

ja meidän pitää laskea

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n - \mathbf{f}'(\mathbf{X}_n)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{X}_n), \quad n \geq 0.$$

Jos valitsemme $X_0 = \frac{3}{2}$ *ja* $y_0 = \frac{1}{2}$ *niin saamme*

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Newtonin menetelmä, jatk.

Jos käytämme laskuihin Matlab/Octavea niin määrittelemme ensin funktion $\mathbf{f}$ *komennolla*
`f=@(X)[X(1)^2+4*X(2)^2-4;X(1)^2-2*X(1)-X(2)+1]`
ja sitten sen derivaatan $\mathbf{f}'$ *komennolla*
`df=@(X)[2*X(1),8*X(2);2*X(1)-2,-1]`
Sitten valitsemme `X=[1.5;0.5]` *ja laskemme monto kertaa* `X=X-df(X)-1*f(X)` *(tai* `X= X-df(X)\f(X)`*) ja tuloksena saamme*

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 1.750000000000000 \\ 0.500000000000000 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 1.717105263157895 \\ 0.513157894736842 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} 1.716438375580136 \\ 0.513283501264863 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_4 = \begin{bmatrix} 1.716438125054029 \\ 0.513283587030869 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_5 = \begin{bmatrix} 1.716438125053991 \\ 0.513283587030878 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_6 = \begin{bmatrix} 1.716438125053991 \\ 0.513283587030878 \end{bmatrix}$$

Miksi Newtonin menetelmä konvergoi niin nopeasti kun se konvergoi?

Oletamme, että funktio $\mathbf{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *on derivoituva ja sellainen, että on olemassa vakioita* L *ja* M *siten, että*

$$\|\mathbf{f}'(\mathbf{x}+\mathbf{v}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\| \le L\|\mathbf{v}\| \quad \text{ja} \quad \|\mathbf{f}'(\mathbf{x})^{-1}\| \le M,$$

kaikilla $\mathbf{x}$ *ja* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ *(tai ainakin kun* $\mathbf{x} = \mathbf{x}_n$ *ja* $\|\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\|$*. Lisäksi oletamme, että* $\mathbf{f}(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0}$*. Jos käytämme Newtonin mentelmää yhtälösysteemin* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ *ratkaisemiseksi ja laskemme* $(\mathbf{x}_n)_{n=0}^{\infty}$ *niin pätee*

$$\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_*\| \le \tfrac{1}{2}ML\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_*\|^2, \quad n \ge 1.$$

Perustelu tähän on seuraava: Jos $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ *on jatkuvasti derivoituva niin pätee* $\mathbf{g}(1) - \mathbf{g}(0) - \mathbf{g}'(0) = \int_0^1 (\mathbf{g}'(t) - \mathbf{g}'(0))\,\mathrm{d}t$*. Jos* $\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{h})$ *niin* $\mathbf{g}'(t) = \mathbf{f}'(\mathbf{x} + t\mathbf{h})\mathbf{h}$ *jolloin*

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h} &= \mathbf{g}(1) - \mathbf{g}(0) - \mathbf{g}'(0) \\ &= \int_0^1 \big(\mathbf{f}'(\mathbf{x}+t\mathbf{h})\mathbf{h} - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}\big)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Miksi Newtonin menetelmä konvergoi niin nopeasti kun se konvergoi? jatk.

Tästä epäyhtälöstä ja oletuksista seuraa, että

$$\begin{aligned}\big\|\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}\big\| &\le \int_0^1 \big\|\mathbf{f}'(\mathbf{x}+t\mathbf{h})\mathbf{h}-\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}\big\|\,\mathrm{d}t \\ &\le \int_0^1 Lt\|\mathbf{h}\|^2\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}L\|\mathbf{h}\|^2.\end{aligned}$$

Jos nyt valitsemme $\mathbf{x}=\mathbf{x}_n$ *ja* $\mathbf{h}=\mathbf{x}_*-\mathbf{x}_n$ *niin* $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n+\mathbf{h})=\mathbf{0}$ *ja*

$$\mathbf{x}_{n+1}-\mathbf{x}_* = \mathbf{x}_n-\mathbf{x}_*-\mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)^{-1}\big(\mathbf{f}(\mathbf{x}_n+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)-\mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)\mathbf{h}\big),$$

ja oletuksesta edellä johdetusta epäyhtälöstä seuraa, että

$$\|\mathbf{x}_{n+1}-\mathbf{x}_*\| \le M\big\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_n+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)-\mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)\mathbf{h}\big\| \le \tfrac{1}{2}ML\|\mathbf{x}_n-\mathbf{x}_*\|^2.$$

Tästä tuloksesta seuraa, että **ainakin** *jos* $\frac{1}{2}ML\|\mathbf{x}_m-\mathbf{x}_*\|<1$ *jollain* $m\ge 0$ *niin vektorit* $\mathbf{x}_n$ *suppenevat kohti ratkaisua* $\mathbf{x}_*$ *ja kun* $\|\mathbf{x}_n-\mathbf{x}_*\|$ *on riittävän pieni, niin etäisyys ratkaisuun pienenee hyvin nopeasti.*