Aalto-yliopisto

Gripenberg, Nieminen, Ojanen, Tiilikainen, Weckman

MS-A0207 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (Chem)
2. välikoe 15.2.2016

*Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !*
*Laskimia tai taulukoita ei saa käyttää tässä kokeessa!*

**1.** Olkoon $f(x,y) = 3x - x^3 - 3xy^2$. Mitkä pisteistä $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ ja $(-1,0)$ ovat funktion $f$ derivaatan (eli gradientin) nollakohtia ja mitkä näistä ovat paikallisia maksimipisteitä ja mitkä paikallisia minimipisteitä. Perustele!

*Ratkaisu:* Koska

$$f_x(x,y) = 3 - 3x^2 - 3y^2,$$
$$f_y(x,y) = -6xy,$$

niin toteamme, että $f_x(1,0) = f_y(1,0) = f_x(0,1) = f_y(0,1) = f_x(-1,0) = f_y(-1,0) = 0$ kun taas $f_x(1,1) \neq 0$ joten $(1,0)$, $(0,1)$ ja $(-1,0)$ ovat derivaatan nollakohtia kun taas $(1,1)$ sitä ei ole.

Toinen derivaatta on

$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} -6x & -6y \\ -6y & -6x \end{bmatrix},$$

joten

$$f''(1,0) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}, \quad f''(0,1) = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}, \quad f''(-1,0) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Koska lävistäjämatriisin ominaisarvot ovat alkiot lävistäjällä niin matriisin $f''(1,0)$ ominaisarvot ovat negatiiviset ja matriisin $f''(-1,0)$ ominaisarvot ovat positiiviset josta seuraa, että $(1,0)$ on paikallinen maksimipiste ja $(-1,0)$ on paikallinen minimipiste. Mutta $\det(f''(0,1)) = -36 < 0$, josta seuraa että ominaisarvot ovat erimerkkiset koska determinantti on ominaisarvojen tulo ja näin ollen $(0,1)$ on satulapiste eikä paikallinen ääriarvopiste.

---

**2.** Määritä funktion $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ suurin arvo kun $x^2 + (y-1)^2 = 1$ käyttäen Lagrangen kerrointa. Selitä lyhyesti miten voidaan päätellä, että suurin arvo todella löytyy tällä tavalla!

*Ratkaisu:* Muodostamme Lagrangen funktion

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + 2y^2 + \lambda(x^2 + (y-1)^2 - 1)$$

ja määritämme tämän funktion derivaatan nollakohdat:

$$0 = F_x = 2x + 2\lambda x,$$
$$0 = F_y = 4y + 2\lambda(y-1),$$
$$0 = F_\lambda = x^2 + (y-1)^2 - 1.$$

Ensimmäisestä yhtälöstä seuraa $x = 0$ tai $\lambda = -1$. Jos $x = 0$ niin kolmannesta yhtälöstä seuraa, että $y = 2$ tai $y = 0$ ja toisesta seuraa silloin, että $\lambda = -4$ tai $\lambda = 0$ ($\lambda$:n arvo on tässä tapauksessa epäoleellinen mutta on periaatteessa tärkeätä todeta, että yhtälösysteemillä on ratkaisu.) Jos $\lambda = -1$ niin toisesta yhtälöstä seuraa, että $y = -1$ jolloin kolmannella yhtälöllä ei ole ratkaisua. Mahdolliset ääriarvopisteet ovat siis $(0, 2)$ ja $(0, 0)$ ja koska $f(0, 2) = 8$ ja $f(0, 0) = 0$, niin toteamme, että suurin arvo on $8$.

Rajoitusehto $g(x, y) = x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0$ määrittelee ympyrän, joka on rajoitettu ja suljettu joukko jolla jatkuva funktio $f$ saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa. Kaikki esiintyvät funktiot ovat jatkuvasti derivoituvia ja rajoitusehtofunktion $g$ gradientti ei ole $0$ kun $g(x, y) = 0$ joten ääriarvopisteissä Lagrangen funktion gradientti häviää eli hakemalla kaikki nämä pisteet löydämme myös pisteen missä suurin arvo saavutetaan.

---

**3.**

(a) Tutkija T oli tehnyt mittauksia ja saanut havainnot $(x_j, y_j)$, $j = 1, 2, \ldots, 27$. Hän olettaa teorioihin perustuen, että $y_j \approx c_1 \mathrm{e}^{x_j} + c_2 + c_3 \mathrm{e}^{-x_j}$ ja hän päättää määrittää vakiot $c_1$, $c_2$ ja $c_3$ siten, että $\sum_{j=1}^{27} \left(c_1 \mathrm{e}^{x_j} + c_2 + c_3 \mathrm{e}^{-x_j} - y_j\right)^2$ on mahdollisimman pieni. Hän aikoo laskea kertoimien $c_1$, $c_2$ ja $c_3$ arvot käyttäen kaavaa $C = (A^{\mathrm{T}} A)^{-1} A^{\mathrm{T}} Y$. Mikä on tässä tapauksessa matriisi $A$?

(b) Olkoon $D$ kolmio, jonka kulmapisteet ovat $(1, -1)$, $(1, 3)$ ja $(-3, 3)$. Määritä integroimisrajat kun tasointegraali $\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}A$ kirjoitetaan iteroituina integraaleina:

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}A = \int_?^? \left( \int_?^? f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

$$\text{ja} \quad \iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}A = \int_?^? \left( \int_?^? f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Piirrä kuvio!

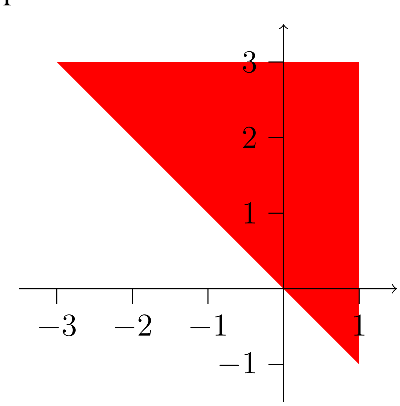
*Ratkaisu:* (a) Matriisi $A$ on $27 \times 3$ matriisi jonka alkiot ovat

$$A(j, k) = \begin{cases} \mathrm{e}^{x_j}, & k = 1, \\ 1, & k = 2, \\ \mathrm{e}^{-x_j}, & k = 3. \end{cases}$$

eli

$$A = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{x_1} & 1 & \mathrm{e}^{-x_1} \\ \mathrm{e}^{x_2} & 1 & \mathrm{e}^{-x_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{e}^{x_{27}} & 1 & \mathrm{e}^{-x_{27}} \end{bmatrix}$$

(b) Alue $D$ näyttää suurin piirtein seuraavanlaiselta:



Koska kolmion hypotenuusa on suoralla $y = -x$ eli $x = -y$ niin

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_{-1}^{3} \left( \int_{-y}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y,$$

ja

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_{-3}^{1} \left( \int_{-x}^{3} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

---

**4.** Laske integraali $\iint_D 4y\,\mathrm{d}A$ missä $D = \{\,(x,y) : x^2 + 4y^2 \le 9,\ x \ge 0,\ y \ge 0\,\}$ seuraavalla muuttujien vaihdolla: $x = 2r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$.

*Ratkaisu:* Koska $x \ge 0$ ja $y \ge 0$ joukossa $D$ niin $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ ja koska $x^2 + 4y^2 = 4r^2\cos(\theta)^2 + 4r^2\sin(\theta)^2 = 4r^2$ niin ehdosta $x^2 + 4y^2 \le 9$ seuraa $r^2 \le \frac{9}{4}$ eli $0 \le r \le \frac{3}{2}$. Lisäksi pätee

$$\frac{\partial}{\partial r}x(r,\theta) = 2\cos(\theta), \qquad \frac{\partial}{\partial \theta}x(r,\theta) = -2r\sin(\theta),$$
$$\frac{\partial}{\partial r}y(r,\theta) = \sin(\theta), \qquad \frac{\partial}{\partial \theta}y(r,\theta) = r\cos(\theta),$$

josta seuraa, että

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\left( \begin{bmatrix} 2\cos(\theta) & -2r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{bmatrix} \right) = 2r(\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2) = 2r$$

jolloin $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$. Näin ollen

$$\iint_D y\,\mathrm{d}A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\frac{3}{2}} 4r\sin(\theta)2r\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\theta = \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta \right) \left( \int_0^{\frac{3}{2}} 8r^2\,\mathrm{d}r \right)$$
$$= \left( \Big/_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(\theta)) \right) \left( \Big/_0^{\frac{3}{2}} \frac{8}{3}r^3 \right) = (0 - (-1)) \left( \frac{8}{3} \cdot \frac{27}{8} - 0 \right) = 9.$$

---