

Trigonometria

1.

- a) Määrittele trigonometriset funktiot.
- b) Vertaa trigonometristen funktioiden ominaisuuksia (määrittämis- ja arvojoukko sekä perusjakso).

Vihje:

- * Trigonometriset funktiot suorakulmaisessa kolmiossa
- * Trigonometristen funktioiden kuvaajat

Ratkaisu:

- a) Määritellään mielivaltaisen kulman α trigonometriset funktiot tarkastelemalla yksikköympyrää eli 1-säteistä origokeskistä ympyrää. Kulma α sijaitsee siten, että sen kärki on origossa ja oikea kylki (alkukylki) positiivisella x -akselilla. Kulma kasvaa, kun loppukylki kiertyy positiiviseen kiertosuuntaan (vastapäivään). Vastaavasti negatiiviseen suuntaan kiertäminen (myötäpäivään) merkitsee kulman pienenemistä ja negatiivisia kulmia.

Kulman α kiertävä loppukylki kohtaa yksikköympyrän koordinaatiston pisteessä (x,y) . Trigonometristen funktioiden määritelmät ovat silloin:

$$\sin(\alpha) = y,$$

$$\cos(\alpha) = x,$$

$$\tan(\alpha) = \frac{y}{x} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)},$$

$$\cot(\alpha) = \frac{x}{y} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)},$$

$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} \quad \text{ja}$$

$$\csc(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)}.$$

- b) Trigonometriset funktiot saavat yksikköympyrän eri neljänneksissä eri merkkisiä arvoja. Funktiot sini ja kosekanti saavuttavat positiivisia arvoja 1. ja 2. neljänneksessä sekä negatiivisia 3. ja 4. neljänneksessä. Kosini ja sekanti saavat positiivisia arvoja 1. ja 4. neljänneksessä sekä tangentti ja kotangentti 1. ja 3. neljänneksessä.

Sini ja kosini ovat määriteltyjä kaikilla argumentin x reaaliarvoilla. Muut funktiot ovat määriteltyjä muualla paitsi nimittäjän nollakohdissa. Funktioiden lähtöjoukot ovat siten seuraavat:

$$\sin(x), x \in \mathbb{R};$$

$$\cos(x), x \in \mathbb{R};$$

$$\tan(x), x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi;$$

$$\cot(x), x \neq n\pi;$$

$$\sec(x), x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \text{ja}$$

$$\csc(x), x \neq n\pi.$$

2.

- a) Määritä tarkka arvo lausekkeille $\cos(\alpha)$, $\tan(\alpha)$, ja $\cot(\alpha)$, kun $\sin(\alpha) = \frac{1}{3}$ ja $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
- b) Laske lausekkeen $\sin(2x)$ tarkka arvo, kun $\cos(x) = \frac{5}{13}$ ja $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$. (YO kevät 1985 tehtävä 3)
- c) Kulma α on tylppä ja $\sin(\alpha) = \frac{2}{3}$. Määritä tarkka arvo lausekkeille $\cos(\alpha)$ ja $\tan(\alpha)$.

Vihje:

* Trigonometristen funktioiden merkkikaaviot

Vastaus:

- a) $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{8}}{3}$, $\tan(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{8}}$ ja $\cot(\alpha) = \sqrt{8}$
- b) $\sin(2x) = -\frac{120}{169}$
- c) $\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ ja $\tan(\alpha) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

Ratkaisu:

- a) Koska $\sin(\alpha) = \frac{1}{3}$, saadaan määritelmän mukaan suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa on 3 ja kateetit 1 ja $x = \sqrt{8}$. Tällöin $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{8}}{3}$, $\tan(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{8}}$ ja $\cot(\alpha) = \sqrt{8}$.
- b) Koska $\cos(\alpha) = \frac{5}{13}$, saadaan määritelmän mukaan suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa on 13 ja kateetit 5 ja $y = 12$. Funktioiden $\sin$ ja $\cos$ merkkikaavioiden perusteella $\cos$ on positiivinen ja $\sin$ negatiivinen, kun $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$. Saadaan $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x) = 2 \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) \cdot \frac{5}{13} = -\frac{120}{169}$.
- c) Koska $\sin(\alpha) = \frac{2}{3}$, saadaan määritelmän mukaan suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa on 3 ja kateetit 2 ja $z = \sqrt{5}$. Funktiot $\cos$ ja $\tan$ ovat molemmat negatiivisia 2. neljänneksessä. Saadaan $\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ ja $\tan(\alpha) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

3.

- a) Tasakylkisen kolmion kylki on 7,2 cm ja huippukulma 48 astetta. Laske kolmion ala.
- b) Kolmion sivu on 2,83 m ja sen viereiset kulmat 49,5 astetta ja 71,6 astetta. Laske kolmion kolmas kulma, muut sivut, ala sekä kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde.

Vihje:

* Sinilause ja kosinilause

* Kulmanpuolittajat ja keskijanat

Vastaus:

a) $18,9 \text{ cm}^2$

b) $\alpha = 58,9^\circ$, $x = 2,51 \text{ m}$, $y = 3,14 \text{ m}$, $A = 3,3744 \text{ m}^2$ ja $R = 1,65 \text{ m}$

Ratkaisu:

a) Alan kaavan avulla saadaan $A = \frac{1}{2}ac \sin(\beta) = \frac{1}{2} \cdot 7,2 \cdot 7,2 \cdot \sin(48^\circ) = 18,9 \text{ (cm}^2\text{)}$.

b) Kolmion kulmien summa on 180° , joten kolmion kolmas kulma on $\alpha = 180^\circ - (49,5^\circ + 71,6^\circ) = 58,9^\circ$.

Muut sivut saadaan sinilauseen avulla:

$$\frac{x}{\sin(49,5^\circ)} = \frac{2,83}{\sin(58,9^\circ)} \Leftrightarrow x = 2,51 \text{ (m)} \text{ ja } \frac{y}{\sin(71,6^\circ)} = \frac{2,83}{\sin(58,9^\circ)} \Leftrightarrow y = 3,14 \text{ (m)}.$$

Kolmion pinta-ala

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2,83 \cdot 3,14 \cdot \sin(49,5^\circ) = 3,3744 \text{ (m}^2\text{)}$$

ja ympäri piirretyn ympyrän säde

$$2R = \frac{2,83}{\sin(58,9^\circ)} \Leftrightarrow R = 1,65 \text{ (m)}.$$

4. Kolmion kaksi sivua ovat 5,0 cm ja 6,0 cm sekä ensiksi mainitun sivun vastainen kulma $52,4$ astetta. Laske jälkimmäisen sivun vastainen kulma.

Vastaus: $\alpha = 71,94^\circ$ tai $\alpha = 108,06^\circ$

Ratkaisu: Kuvausta vastaava kolmio voi olla terävä- tai tylppäkulmainen.

Kulma α_1 saadaan sinilauseen avulla

$$\frac{6}{\sin(\alpha)} = \frac{5}{\sin(52,4^\circ)} \Leftrightarrow \alpha \approx 71,94^\circ \text{ ja } \alpha_2 = 180^\circ - 71,94^\circ = 108,06^\circ.$$

5.

a) Kolmion kaksi sivua ovat 7,0 cm ja 2,0 cm sekä niiden välinen kulma $67,2$ astetta. Laske kolmion kolmas sivu.

b) Erästä talosta voidaan mennä uimarantaan joko kulkemalla ensin suoraan maantietä pitkin 2400 metriä, kääntymällä sitten 105 astetta vasempaan ja kulkemalla suoraan pikikutietä pitkin vielä 1300 metriä tai sitten kulkemalla koko matka metsän läpi. Millä nopeudella pitäisi metsän läpi kulkea, jotta siihen menisi yhtä paljon aikaa kuin tietä pitkin käveltäessä, kun nopeus tietä pitkin on 6 km/h ?

Vastaus:

a) $6,49 \text{ cm}$

b) 3,9 km/h

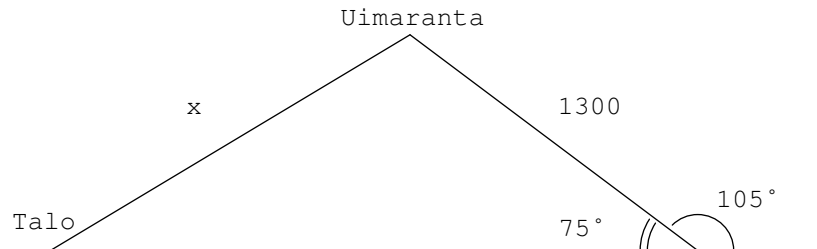
Ratkaisu:

a) Kolmion kolmas sivu saadaan kosinilauseen avulla

$$x^2 = 7^2 + 2^2 - 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot \cos(67,2^\circ) \Leftrightarrow x \approx 6,49 \text{ (cm)}.$$

b) Metsäpolun pituus saadaan kosinilauseen avulla

$$x^2 = 2400^2 + 1300^2 - 2 \cdot 2400 \cdot 1300 \cdot \cos(75^\circ) \Leftrightarrow x \approx 2415,568 \text{ (m)}.$$



Matka-aika t tietä pitkin on $t = \frac{2,4+1,3}{6} \approx 0,617$ (h), jolloin nopeus metsän läpi on $v = \frac{s}{t} = \frac{2,416}{0,617} = 3,9$ (km/h).

6. Osoita oikeaksi kaava

a) $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$

b) $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos(\alpha)$

c) $\cos(75^\circ) = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

Vihje:

* Trigonometriset yhtälöt

Vastaus:

Ratkaisu:

a) $\cos(90^\circ - \alpha)$
 $= \cos(90^\circ) \cdot \cos(\alpha) + \sin(90^\circ) \cdot \sin(\alpha)$
 $= 0 \cdot \cos(\alpha) + 1 \cdot \sin(\alpha)$
 $= \sin(\alpha) \quad \square$

b) $\cos(180^\circ + \alpha)$
 $= \cos(180^\circ) \cdot \cos(\alpha) - \sin(180^\circ) \cdot \sin(\alpha)$
 $= -1 \cdot \cos(\alpha) - 0 \cdot \sin(\alpha)$
 $= -\cos(\alpha) \quad \square$

$$\begin{aligned}
\text{c) } \cos(75^\circ) &= \cos(45^\circ + 30^\circ) \\
&= \cos(45^\circ) \cdot \cos(30^\circ) - \sin(45^\circ) \cdot \sin(30^\circ) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \quad \square
\end{aligned}$$

7. Määritä lausekkeen $\sin(\alpha - \beta)$ tarkka arvo, kun $\sin(\alpha) = -\frac{1}{4}$, $\cos(\beta) = \frac{2}{3}$, $0^\circ < \alpha < 270^\circ$ ja $0^\circ < \beta < 270^\circ$. Missä neljänneksessä on kulma $\alpha - \beta$?

Vastaus: Lauseke $\sin(\alpha - \beta) = \frac{-2+5\sqrt{3}}{12}$ ja kulma on 2. neljänneksessä.

Ratkaisu: Koska $\sin(\alpha) = -\frac{1}{4}$, saadaan määritelmän mukaan suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa on 4 ja kateetit 1 ja $\sqrt{15}$. Tällöin $\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{15}}{4}$, kun $0^\circ < \alpha < 270^\circ$. Lisäksi koska $\cos(\beta) = \frac{2}{3}$, saadaan suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa on 3 ja kateetit 2 ja $\sqrt{5}$. Tällöin $\sin(\beta) = \frac{\sqrt{5}}{3}$, kun $0^\circ < \beta < 270^\circ$.

Saadaan $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} - (-\frac{\sqrt{15}}{4}) \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{-2+5\sqrt{3}}{12} \approx 0,56$. Koska kulma α on 3. neljänneksessä ja kulma β 1. neljänneksessä, on kulman $\alpha - \beta$ oltava joko 3. neljänneksessä tai 2. neljänneksessä. Lisäksi, koska $\sin(\alpha - \beta)$ on positiivinen, tiedetään, että kulma $\alpha - \beta$ on 2. neljänneksessä.

8. Määritä funktioiden suurin ja pienin arvo.

- a) $f(x) = (\sin(x))^2 + \sin(x)$
- b) $f(x) = 2(\sin(x))^2 + \cos(x)$
- c) $f(x) = \sqrt{8(\sin(x))^2 (\cos(x))^2}$
- d) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4}) \sin(x + \frac{\pi}{4})$

Vihje:

- * Ulkoa muistettavat peruskaavat
- * Helposti johdettavat kaavat

Vastaus:

- a) suurin arvo on 2 ja pienin on $-\frac{1}{4}$
- b) suurin arvo on $2\frac{1}{8}$ ja pienin on -1
- c) suurin arvo on $\sqrt{2}$ ja pienin on 0
- d) suurin arvo on $\frac{1}{2}$ ja pienin on $-\frac{1}{2}$

Ratkaisu:

- a) Täydennetään funktio neliöksi.

$$\begin{aligned}f(x) &= (\sin(x))^2 + \sin(x) \\&= (\sin(x))^2 + \sin(x) + \frac{1}{4} + (-\frac{1}{4}) \\&= (\sin(x) + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Koska $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, on funktion suurin arvo $f(0) = (\sin(0) + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = 2$ ja pienin $f(\frac{1}{2}) = (\sin(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$.

- b) Täydennetään funktio neliöksi.

$$\begin{aligned}f(x) &= 2(\sin(x))^2 + \cos(x) \\&= 2(1 - (\cos(x))^2) + \cos(x) \\&= 2 - 2(\cos(x))^2 + \cos(x) \\&= -2\left((\cos(x))^2 - \frac{1}{2}\cos(x)\right) + 2 \\&= -2\left((\cos(x))^2 - \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{8} + 2 \\&= -2\left(\cos(x) - \frac{1}{4}\right)^2 + 2\frac{1}{8}\end{aligned}$$

Koska $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, on funktion suurin arvo $f(1,318) = -2(\frac{1}{4} - \frac{1}{4})^2 + 2\frac{1}{8} = 2\frac{1}{8}$ ja pienin $f(\pi) = -2(\cos(\pi) - \frac{1}{4})^2 + 2\frac{1}{8} = -1$.

- c) Sievennetään funktio.

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{8(\sin(x))^2(\cos(x))^2} \\&= 2 \cdot |\sin(x)| \cdot |\cos(x)| \cdot \sqrt{2} \\&= |2 \cdot \sin(x) \cos(x)| \cdot \sqrt{2} \\&= |\sin(2x)| \cdot \sqrt{2}\end{aligned}$$

Koska $-1 \leq \sin(x) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \sin(2x) \leq 1$, on funktion suurin arvo $f(\frac{\pi}{2}) = |\sin(\frac{\pi}{2})| \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$ ja pienin $f(0) = |\sin(0)| \cdot \sqrt{2} = 0$.

- d) Sievennetään lauseke.

$$\begin{aligned}f(x) &= \sin(x - \frac{\pi}{4}) \sin(x - \frac{\pi}{4}) \\&= \left(\sin(x) \cos(\frac{\pi}{4}) - \cos(x) \sin(\frac{\pi}{4})\right) \left(\sin(x) \cos(\frac{\pi}{4}) + \cos(x) \sin(\frac{\pi}{4})\right) \\&= \left(\sin(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\sin(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sin(x) - \cos(x)\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sin(x) + \cos(x)\right) \\&= \frac{1}{2} \left((\sin(x))^2 - (\cos(x))^2\right) \\&= -\frac{1}{2} \left((\cos(x))^2 - (\sin(x))^2\right) \\&= -\frac{1}{2} \cos(2x)\end{aligned}$$

Koska $-1 \leq \cos(x) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \cos(2x) \leq 1$, on funktion suurin arvo $f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2} \cdot \cos(\pi) = \frac{1}{2}$ ja pienin $f(0) = -\frac{1}{2} \cos(0) = -\frac{1}{2}$.

9. Ratkaise yhtälö

a) $\sin(x) = -\frac{1}{2}$

b) $\sin(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\tan(x) = 2$

d) $3(\cos(\frac{x}{2}))^2 = 0$

e) $2\sin(x + \frac{\pi}{3}) + \sqrt{2} = 0$

Vihje:

* Esimerkki 1 trigonometrisesta yhtälöstä

* Esimerkki 2 trigonometrisesta yhtälöstä

Vastaus:

a) $x_1 = 210^\circ + n \cdot 360^\circ \wedge x_2 = 330^\circ + n \cdot 360^\circ$, kun $n \in \mathbb{Z}$

b) $x_1 = 20^\circ + n \cdot 120^\circ \wedge x_2 = 40^\circ + n \cdot 120^\circ$, kun $n \in \mathbb{Z}$

c) $x = 63,4^\circ + n \cdot 180^\circ$, kun $n \in \mathbb{Z}$

d) $x_1 = 180^\circ + n \cdot 720^\circ \wedge x_2 = 540^\circ + n \cdot 720^\circ$, kun $n \in \mathbb{Z}$

e) $x_1 = \frac{11\pi}{12} + n \cdot 2\pi \wedge x_2 = \frac{17\pi}{12} + n \cdot 2\pi$, kun $n \in \mathbb{Z}$

Ratkaisu:

a) $\sin(x) = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x_1 = 210^\circ + n \cdot 360^\circ \wedge x_2 = 330^\circ + n \cdot 360^\circ$, kun $n \in \mathbb{Z}$

b) $\sin(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow x_1 = 20^\circ + n \cdot 120^\circ \wedge x_2 = 40^\circ + n \cdot 120^\circ$, kun $n \in \mathbb{Z}$

c) $\tan(x) = 2$

$\Leftrightarrow x = 63,4^\circ + n \cdot 180^\circ$, kun $n \in \mathbb{Z}$

d) $3(\cos(\frac{x}{2}))^2 = 0$

$\Leftrightarrow \cos(\frac{x}{2}) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{x_1}{2} = 90^\circ + n \cdot 360^\circ \wedge \frac{x_2}{2} = 270^\circ + n \cdot 360^\circ$

$\Leftrightarrow x_1 = 180^\circ + n \cdot 720^\circ \wedge x_2 = 540^\circ + n \cdot 720^\circ$, kun $n \in \mathbb{Z}$

e) $2\sin(x + \frac{\pi}{3}) + \sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow x_1 + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{4} + n \cdot 2\pi \wedge x_2 + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{4} + n \cdot 2\pi$

$\Leftrightarrow x_1 = \frac{11\pi}{12} + n \cdot 2\pi \wedge x_2 = \frac{17\pi}{12} + n \cdot 2\pi$, kun $n \in \mathbb{Z}$

10. Ratkaise yhtälö

- a) $\sin(x) = \sin(3x)$
- b) $\cos(2x - 20^\circ) = \cos(x + 10^\circ)$
- c) $\tan(2x) = \tan(45^\circ - x)$

Vastaus:

- a) $x_1 = 0^\circ + n \cdot 180^\circ \wedge x_2 = 45^\circ + n \cdot 90^\circ$, kun $n \in \mathbb{Z}$
- b) $x_1 = 30^\circ + n \cdot 360^\circ \wedge x_2 = \frac{10^\circ}{3} + n \cdot 120^\circ$, kun $n \in \mathbb{Z}$
- c) $x_1 = 15^\circ + n \cdot 60^\circ \wedge x_2 = 75^\circ + n \cdot 180^\circ$, kun $n \in \mathbb{Z}$

Ratkaisu:

- a) $\sin(x) = \sin(3x)$
 $\Leftrightarrow x = 3x + n \cdot 360^\circ$
 $\Leftrightarrow x_1 = 0^\circ + n \cdot 180^\circ$, kun $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sin(3x) \\ \Leftrightarrow \sin(x) &= \sin(180^\circ - 3x) \\ \Leftrightarrow x &= 180^\circ - 3x + n \cdot 360^\circ \\ \Leftrightarrow x_2 &= 45^\circ + n \cdot 90^\circ, \text{ kun } n \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

- b) $\cos(2x - 20^\circ) = \cos(x + 10^\circ)$
 $\Leftrightarrow 2x - 20^\circ = x + 10^\circ + n \cdot 360^\circ$
 $\Leftrightarrow x_1 = 30^\circ + n \cdot 360^\circ$, kun $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\cos(2x - 20^\circ) &= \cos(-x - 10^\circ) \\ \Leftrightarrow \cos(2x - 20^\circ) &= \cos(-x - 10^\circ) \\ \Leftrightarrow 2x - 20^\circ &= -x - 10^\circ + n \cdot 360^\circ \\ \Leftrightarrow x_2 &= \frac{10^\circ}{3} + n \cdot 120^\circ, \text{ kun } n \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

- c) $\tan(2x) = \tan(45^\circ - x)$
 $\Leftrightarrow 2x = 45^\circ - x + n \cdot 180^\circ$
 $\Leftrightarrow x_1 = 15^\circ + n \cdot 60^\circ \wedge x_2 = 75^\circ + n \cdot 180^\circ$, kun $n \in \mathbb{Z}$

11. Ratkaise yhtälö

- a) $\sin(x + 1) = \cos(2x + 3)$
- b) $\tan(x) = \cot(x - 45^\circ)$

Vastaus:

$$\text{a) } x_1 = \frac{\pi}{6} - \frac{4}{3} + n \cdot \frac{2\pi}{3} \wedge x_2 = -\frac{\pi}{2} - 2 - n \cdot 2\pi, \text{ kun } n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{b) } x = 67,5^\circ + n \cdot 90^\circ, \text{ kun } n \in \mathbb{Z}$$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin(x+1) &= \cos(2x+3) \\ &\Leftrightarrow \sin(x+1) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x - 3\right) \\ &\Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} - \frac{4}{3} + n \cdot \frac{2\pi}{3}, \text{ kun } n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(x+1) &= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{2} - 2x - 3\right) \\ &\Leftrightarrow x_2 = -\frac{\pi}{2} - 2 - n \cdot 2\pi, \text{ kun } n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \tan(x) &= \cot(x - 45^\circ) \\ &\Leftrightarrow \tan(x) = \tan(90^\circ - x + 45^\circ) \\ &\Leftrightarrow x = 67,5^\circ + n \cdot 90^\circ, \text{ kun } n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

12. Ratkaise yhtälö

$$\text{a) } \sin(x) = -\sin(3x)$$

$$\text{b) } \cos(x) = -\cos(2x - 60^\circ)$$

$$\text{c) } \tan(x+1) = -\tan(2x+1)$$

Vastaus:

$$\text{a) } x_1 = 0^\circ + n \cdot 360^\circ \wedge x_2 = -90^\circ + n \cdot 180^\circ, \text{ kun } n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{b) } x_1 = 80^\circ + n \cdot 120^\circ \wedge x_2 = 240^\circ + n \cdot 360^\circ, \text{ kun } n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{c) } x = -\frac{2}{3} + n \cdot \frac{\pi}{3}, \text{ kun } n \in \mathbb{Z}$$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin(x) &= -\sin(3x) \\ &\Leftrightarrow \sin(x) = \sin(-3x) \\ &\Leftrightarrow x_1 = 0^\circ + n \cdot 360^\circ, \text{ kun } n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sin(180^\circ + 3x) \\ &\Leftrightarrow x_2 = -90^\circ + n \cdot 180^\circ, \text{ kun } n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos(x) &= -\cos(2x - 60^\circ) \\ &\Leftrightarrow \cos(x) = \cos(180^\circ - 2x + 60^\circ) \\ &\Leftrightarrow x_1 = 80^\circ + n \cdot 120^\circ, \text{ kun } n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \cos(240^\circ - 2x) \\ &\Leftrightarrow \cos(x) = \cos(-240^\circ + 2x) \\ &\Leftrightarrow x_2 = 240^\circ + n \cdot 360^\circ, \text{ kun } n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \tan(x+1) &= -\tan(2x+1) \\ \Leftrightarrow \tan(x+1) &= \tan(-2x-1) \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{2}{3} + n \cdot \frac{\pi}{3}, \text{ kun } n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

13. Ratkaise yhtälö

- a) $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin(x)$
- b) $\sin(3x) + \sin(2x) + \sin(x) = 0$
- c) $(\sin(x))^2 + 4\sin(x) + 4 = 0$
- d) $(\sin(x))^2 - (\cos(x))^2 = 0$
- e) $4\sin(x)\cos(x) - \sqrt{3} = 0$
- f) $\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) = 0$
- g) $(\sin(x))^2 - 4\sin(x)\cos(x) - 5(\cos(x))^2 = 0$

Vastaus:

- a) $x_1 = 0^\circ + n \cdot 720^\circ \wedge x_2 = 360^\circ + n \cdot 720^\circ$
- b) $(x_1 = 0^\circ + n \cdot 360^\circ \wedge x_2 = 180^\circ + n \cdot 360^\circ) \vee$
 $(x_3 = 90^\circ + n \cdot 360^\circ \wedge x_4 = 270^\circ + n \cdot 360^\circ) \vee$
 $(x_5 = 120^\circ + n \cdot 360^\circ \wedge x_6 = 240^\circ + n \cdot 360^\circ), \text{ kun } n \in \mathbb{Z}$
- c) Yhtälöllä ei ole ratkaisua.
- d) $x_1 = 45^\circ + n \cdot 180^\circ \wedge x_2 = 135^\circ + n \cdot 180^\circ, \text{ kun } n \in \mathbb{Z}$
- e) $x_1 = 30^\circ + n \cdot 360^\circ \wedge x_2 = 60^\circ + n \cdot 180^\circ, \text{ kun } n \in \mathbb{Z}$
- f) $x = 150^\circ + n \cdot 180^\circ, \text{ kun } n \in \mathbb{Z}$
- g) $x_1 \approx 78,7^\circ + n \cdot 180^\circ \wedge x_2 \approx 135^\circ + n \cdot 180^\circ, \text{ kun } n \in \mathbb{Z}$

Ratkaisu:

- a) Tiedetään, että $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \Leftrightarrow \sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.
 $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin(x)$
 $\Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$
 $\Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 0$
 $\Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \vee 1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$
 $\Leftrightarrow x_1 = 0^\circ + n \cdot 720^\circ \wedge x_2 = 360^\circ + n \cdot 720^\circ$

$$\begin{aligned}
\text{b) } \sin(3x) + \sin(2x) + \sin(x) &= 0 \\
&\Leftrightarrow \sin(x) \left(4(\cos(x))^2 - 1 \right) + 2\sin(x)\cos(x) + \sin(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin(x) \left(4(\cos(x))^2 - 1 + 2\cos(x) + 1 \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin(x) \left(4(\cos(x))^2 + 2\cos(x) \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin(x)\cos(x) \left(4\cos(x) + 2 \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin(x) = 0 \vee \cos(x) = 0 \vee 4\cos(x) + 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x_1 = 0^\circ + n \cdot 360^\circ \wedge x_2 = 180^\circ + n \cdot 360^\circ) \vee \\
&\quad (x_3 = 90^\circ + n \cdot 360^\circ \wedge x_4 = 270^\circ + n \cdot 360^\circ) \vee \\
&\quad (x_5 = 120^\circ + n \cdot 360^\circ \wedge x_6 = 240^\circ + n \cdot 360^\circ), \text{ kun } n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } &\text{Bikvadraattinen yhtälö. Merkitään } \sin(x) = u. \\
&(\sin(x))^2 + 4\sin(x) + 4 = 0 \\
&\Rightarrow u^2 + 4u + 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow u = -2 \\
&\Rightarrow \sin(x) = -2, \text{ mikä on mahdoton. Yhtälöllä ei ole ratkaisua.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d) } &(\sin(x))^2 - (\cos(x))^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow -(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \\
&\Leftrightarrow x_1 = 30^\circ + n \cdot 360^\circ \wedge x_2 = 60^\circ + n \cdot 180^\circ, \text{ kun } n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{e) } &4\sin(x)\cos(x) - \sqrt{3} = 0 \\
&\Leftrightarrow 2 \cdot 2\sin(x)\cos(x) - \sqrt{3} = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&\Leftrightarrow x_1 = 30^\circ + n \cdot 360^\circ \wedge x_2 = 60^\circ + n \cdot 180^\circ, \text{ kun } n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{f) } &\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}\sin(x)}{\cos(x)} + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{3}\tan(x) = -1 \\
&\Leftrightarrow \tan(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\
&x = 150^\circ + n \cdot 180^\circ, \text{ kun } n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{g) } &(\sin(x))^2 - 4\sin(x)\cos(x) - 5(\cos(x))^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} - \frac{4\sin(x)\cos(x)}{(\cos(x))^2} - \frac{5(\cos(x))^2}{(\cos(x))^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow (\tan(x))^2 - 4\tan(x) - 5 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Bikvadraattinen yhtälö. Merkitään } \tan(x) = u. \\
&u^2 - 4u - 5 = 0 \\
&u_1 = 5 \wedge u_2 = -1 \\
&\Rightarrow \tan(x) = 5 \wedge \tan(x) = -1 \\
&\Leftrightarrow x_1 \approx 78,7^\circ + n \cdot 180^\circ \wedge x_2 \approx 135^\circ + n \cdot 180^\circ, \text{ kun } n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

14. Määritä likiarvoja käyttämättä funktion $f : f(x) = (\sin(x))^2(\cos(x))^4$, $x \in \mathbb{R}$, suurin ja

pienin arvo. (YO kevät 1989, tehtävä 8a)

Vihje:

- * Hyödynnä derivaattaa.
- * Merkitse $(\cos(x))^2 = u$.

Vastaus: suurin arvo on $\frac{4}{27}$ ja pienin 0

Ratkaisu: Sievennetään funktio

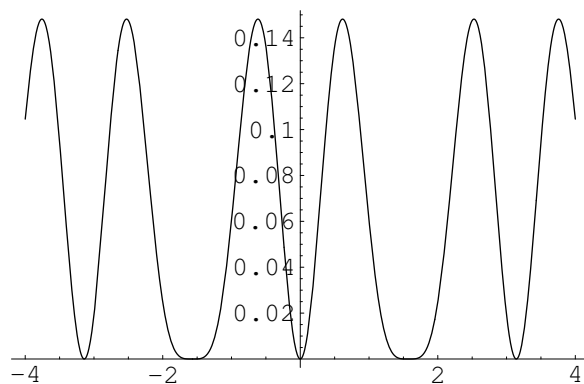
$$\begin{aligned} f(x) &= (\sin(x))^2 (\cos(x))^2 \\ &= \left(1 - (\cos(x))^2\right) (\cos(x))^4 \\ &= (\cos(x))^4 - (\cos(x))^6. \end{aligned}$$

Merkitään $(\cos(x))^2 = u \Rightarrow u^2 - u^3 = g(u)$.

Etsitään funktion g nollakohdat

$$g'(u) = 2u - 3u^2 = 3u\left(\frac{2}{3} - u\right) = 0 \Leftrightarrow u = 0 \vee u = \frac{2}{3}.$$

Derivaatta $g' > 0$, kun $0 < u < \frac{2}{3}$ ja $g < 0$, kun $\frac{2}{3} < u < 1$. Funktio g saavuttaa pienimmän arvon $g(0) = 0$ ja suurimman arvon $g(\frac{2}{3}) = \frac{4}{27}$.



15. (*) Käyrät $y = \sin(x)$ ja $y = \sin(2x)$ rajoittavat kahta eri kokoa olevia silmukoita. Laske kummankin silmukan pinta-ala.

Vihje:

- * Laske kuvaajien nollakohdat ja leikkauspisteet.
- * Hyödynnä integraalia.

Vastaus: Pienemmän silmukan ala on $\frac{1}{4}$ ja suuremman $2\frac{1}{4}$.

Ratkaisu: Etsitään funktion $y = \sin(2x)$ nollakohdat.

$$\sin(2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0 + n \cdot \pi \wedge x_2 = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

Etsitään funktioiden $\sin(x)$ ja $\sin(2x)$ leikkauspisteet.

$$\sin(x) = \sin(2x)$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0 + n \cdot 2\pi, \text{ kun } n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(x) = \sin(\pi - 2x)$$

$$x_2 = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi, \text{ kun } n \in \mathbb{Z}$$

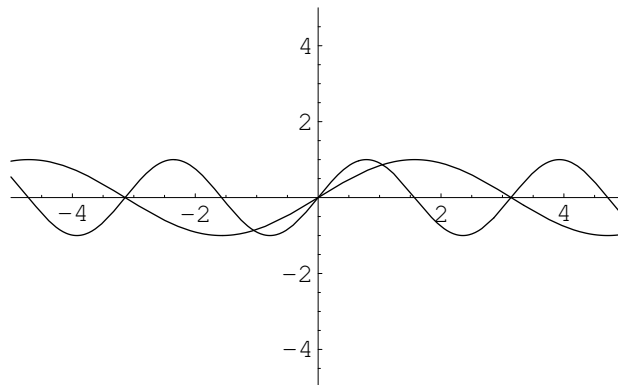
Nyt pienemmän silmukan ala on $A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin(2x) - \sin(x)) dx$.

Integroidaan sivussa. Merkitään $2x = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$.

$$\begin{aligned} \int \sin(2x) &= \int \sin(t) \cdot \frac{dt}{2} \\ &= \frac{1}{2} (-\cos(t)) + C \\ &= \frac{1}{2} \cos(2x) + C \end{aligned}$$

$$\text{Tällöin } A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{1}{2} \cos(2x) + \cos(x) \right) = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Suuremman silmukan ala on } A_2 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left(-\cos(x) + \frac{1}{2} \cos(2x) \right) = 2\frac{1}{4}.$$



16. (*) Puistossa on kaksi toisiaan vastaan kohtisuoraa käytävää sekä koirien suosima puu, jonka etäisyys toisesta käytävästä on 60 m, toisesta 100 m. Käytävien väliin on muodostunut lyhin mahdollinen suora oikopolku, joka sivuaa puuta. Minkä kulman tämä oikopolku muodostaa puuta lähempänä olevan käytävän kanssa? (YO syksy 1990 tehtävä 8b)

Vihje:

* Hyödynnä trigonometrasta kaavaa $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ lausekkeen sieventämisessä.

Vastaus: 40°

Ratkaisu: Jos polun ja puuta lähempänä olevan käytävän välinen kulma on α , on polun pituus $\frac{100}{\cos(\alpha)} + \frac{60}{\sin(\alpha)} = 20 \left(\frac{5}{\cos(\alpha)} + \frac{3}{\sin(\alpha)} \right)$.

Määritetään funktion

$$f(\alpha) = \frac{5}{\cos(\alpha)} + \frac{3}{\sin(\alpha)}$$

pienin arvo välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$. Derivaatta

$$\begin{aligned}
 f'(\alpha) &= \frac{5 \sin(\alpha)}{(\cos(\alpha))^2} - \frac{3 \cos(\alpha)}{(\sin(\alpha))^2} \\
 &= \frac{5}{\cos(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{3 \cos(x)}{(\sin(x))^2} \\
 &= \frac{5}{\cos(x)} \cdot \tan(x) - \frac{3 \cos(x)}{(\sin(x))^2} \\
 &= \frac{5}{\sin(x)/\tan(x)} \cdot \tan(x) - \frac{3 \cos(x)}{(\sin(x))^2} \\
 &= 5 \tan(x) \cdot \frac{\tan(x)}{\sin(x)} - \frac{3 \cos(x)}{(\sin(x))^2} \\
 &= 5 \tan(x) \cdot \frac{\tan(x) \sin(x) - 3 \cos(x)}{(\sin(x))^2} \\
 &= \frac{5 (\tan(x))^2 \sin(x) - 3 \cos(x)}{(\sin(x))^2} \\
 &= \frac{5 (\tan(x))^2 \cdot (\cos(x) \tan(x)) - 3 \cos(x)}{(\sin(x))^2} \\
 &= \frac{5 (\tan(x))^3 \cos(x) - 3 \cos(x)}{(\sin(x))^2} \\
 &= \frac{5 \cos(\alpha)}{(\sin(\alpha))^2} \left((\tan(\alpha) - \frac{3}{5})^3 \right) = 0, \text{ kun } \tan(\alpha) = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}, \alpha \approx 40^\circ.
 \end{aligned}$$

Vastaava f :n arvo on pienin, koska $f'(\alpha) < 0$, kun $(\tan(\alpha))^3 < \frac{3}{5}$, ja $f'(\alpha) > 0$, kun $(\tan(\alpha))^3 > \frac{3}{5}$.

