

# Trigonometria

## 1.

- Määrittele trigonometriset funktiot.
- Vertaa trigonometrinen funktioiden ominaisuuksia (määrittys- ja arvojoukko sekä perusjakso).

### Vihje:

- \* Trigonometriset funktiot suorakulmaisessa kolmiossa
- \* Trigonometrinen funktioiden kuvaajat

## 2.

- Määritä tarkka arvo lausekkeille  $\cos(\alpha)$ ,  $\tan(\alpha)$ , ja  $\cot(\alpha)$ , kun  $\sin(\alpha) = \frac{1}{3}$  ja  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .
- Laske lausekkeen  $\sin(2x)$  tarkka arvo, kun  $\cos(x) = \frac{5}{13}$  ja  $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$ . (YO kevät 1985 tehtävä 3)
- Kulma  $\alpha$  on tylppä ja  $\sin(\alpha) = \frac{2}{3}$ . Määritä tarkka arvo lausekkeille  $\cos(\alpha)$  ja  $\tan(\alpha)$ .

### Vihje:

- \* Trigonometrinen funktioiden merkkikaaviot

## 3.

- Tasakylkisen kolmion kylki on 7,2 cm ja huippukulma 48 astetta. Laske kolmion ala.
- Kolmion sivu on 2,83 m ja sen viereiset kulmat 49,5 astetta ja 71,6 astetta. Laske kolmion kolmas kulma, muut sivut, ala sekä kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde.

### Vihje:

- \* Sinilause ja kosinilause
- \* Kulmanpuolittajat ja keskijanat

**4.** Kolmion kaksi sivua ovat 5,0 cm ja 6,0 cm sekä ensiksi mainitun sivun vastainen kulma 52,4 astetta. Laske jälkimmäisen sivun vastainen kulma.

## 5.

- a) Kolmion kaksi sivua ovat 7,0 cm ja 2,0 cm sekä niiden välinen kulma  $67,2$  astetta. Laske kolmion kolmas sivu.
- b) Eräästä talosta voidaan mennä uimarantaan joko kulkemalla ensin suoraan maantietä pitkin 2400 metriä, kääntymällä sitten  $105$  astetta vasempaan ja kulkemalla suoraan pikkutietä pitkin vielä 1300 metriä tai sitten kulkemalla koko matka metsän läpi. Millä nopeudella pitäisi metsän läpi kulkea, jotta siihen menisi yhtä paljon aikaa kuin tietä pitkin käveltäessä, kun nopeus tietä pitkin on  $6$  km/h?

## 6. Osoita oikeaksi kaava

- a)  $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$
- b)  $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos(\alpha)$
- c)  $\cos(75^\circ) = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

### Vihje:

- \* Trigonometriset yhtälöt

**7.** Määritä lausekkeen  $\sin(\alpha - \beta)$  tarkka arvo, kun  $\sin(\alpha) = -\frac{1}{4}$ ,  $\cos(\beta) = \frac{2}{3}$ ,  $0^\circ < \alpha < 270^\circ$  ja  $0^\circ < \beta < 270^\circ$ . Missä neljänneksessä on kulma  $\alpha - \beta$ ?

**8.** Määritä funktioiden suurin ja pienin arvo.

- a)  $f(x) = (\sin(x))^2 + \sin(x)$
- b)  $f(x) = 2(\sin(x))^2 + \cos(x)$
- c)  $f(x) = \sqrt{8(\sin(x))^2 (\cos(x))^2}$
- d)  $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4}) \sin(x + \frac{\pi}{4})$

### Vihje:

- \* Ulkoa muistettavat peruskaavat
- \* Helposti johdettavat kaavat

**9.** Ratkaise yhtälö

- a)  $\sin(x) = -\frac{1}{2}$
- b)  $\sin(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c)  $\tan(x) = 2$

d)  $3(\cos(\frac{x}{2}))^2 = 0$

e)  $2\sin(x + \frac{\pi}{3}) + \sqrt{2} = 0$

**Vihje:**

\* Esimerkki 1 trigonometrisesta yhtälöstä

\* Esimerkki 2 trigonometrisesta yhtälöstä

## 10. Ratkaise yhtälö

a)  $\sin(x) = \sin(3x)$

b)  $\cos(2x - 20^\circ) = \cos(x + 10^\circ)$

c)  $\tan(2x) = \tan(45^\circ - x)$

## 11. Ratkaise yhtälö

a)  $\sin(x + 1) = \cos(2x + 3)$

b)  $\tan(x) = \cot(x - 45^\circ)$

## 12. Ratkaise yhtälö

a)  $\sin(x) = -\sin(3x)$

b)  $\cos(x) = -\cos(2x - 60^\circ)$

c)  $\tan(x + 1) = -\tan(2x + 1)$

## 13. Ratkaise yhtälö

a)  $\sin(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}\sin(x)$

b)  $\sin(3x) + \sin(2x) + \sin(x) = 0$

c)  $(\sin(x))^2 + 4\sin(x) + 4 = 0$

d)  $(\sin(x))^2 - (\cos(x))^2 = 0$

e)  $4\sin(x)\cos(x) - \sqrt{3} = 0$

f)  $\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) = 0$

g)  $(\sin(x))^2 - 4\sin(x)\cos(x) - 5(\cos(x))^2 = 0$

**14.** Määritä likiarvoja käyttämättä funktion  $f : f(x) = (\sin(x))^2(\cos(x))^4$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , suurin ja pienin arvo. (YO kevät 1989, tehtävä 8a)

**Vihje:**

- \* Hyödynnä derivaattaa.
- \* Merkitse  $(\cos(x))^2 = u$ .

**15.** (\*) Käyrät  $y = \sin(x)$  ja  $y = \sin(2x)$  rajoittavat kahta eri kokoa olevia silmukoita. Laske kummankin silmukan pinta-ala.

**Vihje:**

- \* Laske kuvaajien nollakohdat ja leikkauspisteet.
- \* Hyödynnä integraalia.

**16.** (\*) Puistossa on kaksi toisiaan vastaan kohtisuoraa käytävää sekä koirien suosima puu, jonka etäisyys toisesta käytävästä on 60 m, toisesta 100 m. Käytävien väliin on muodostunut lyhin mahdollinen suora oikopolku, joka sivuaa puuta. Minkä kulman tämä oikopolku muodostaa puuta lähempänä olevan käytävän kanssa? (YO syksy 1990 tehtävä 8b)

**Vihje:**

- \* Hyödynnä trigonometrinen kaava  $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$  lausekkeen sieventämisessä.