

Integraalilaskenta

1.

- a) Mikä on integraalifunktio ja miten derivaatta liittyy siihen? Anna esimerkki.
- b) Mitä määrätty integraali tietyllä välillä x tarkoittaa?

Vihje:

- * Integraali
- * Määrätyn integraalin määritelmä

Ratkaisu:

- a) Reaalifunktion f integraalifunktioksi sanotaan jokaista funktiota F , jonka derivaatta on f . Koska $f(x)$ on jokaisen funktion $F(x) + C$ derivaatta (missä C on vakio), ei integraalifunktio ole yksikäsitteinen. Saman funktion integraalifunktiot voivat siis erota toisistaan vakiolla. Esimerkiksi funktion $f(x) = x^2$ derivaatta on $f'(x) = 2x$. Funktiolla $f'(x)$ mikä tahansa integraalifunktio $F(x) = x^2 + C$, siis esimerkiksi $f(x) = x^2 + 2$.

- b) Määrätty integraali tietyllä välillä tarkoittaa funktion ja akselin tai kahden funktion väliin jäävän alueen pinta-alaa kyseisellä välillä. Esimerkiksi funktion $f(x) = -x^2 + 4$ ja x -akselin väliin jäävän alueen pinta-ala välillä $[0, 2]$ on

$$\int_0^2 (-x^2 + 4) dx = \int_0^2 \left(-\frac{x^3}{3} + 4x \right) = -\frac{8}{3} + 4 \cdot 2 - 0 = \frac{16}{3} = 3\frac{1}{3}.$$

2. Ovatko alla olevat väittämät tosia? Perustele tai anna vastaesimerkki.

- a) Jos F on jokin funktion f integraalifunktio, niin kaikki f :n integraalifunktiot ovat muotoa $F + C$, jossa C on vakio.
- b) Jokaisella jatkuvalla funktiolla on integraalifunktio.
- c) Paloittaisella funktiolla $h(x) = \begin{cases} 3x, & \text{kun } x < 1 \\ -3, & \text{kun } x \geq 1 \end{cases}$ on integraalifunktio, joka on määritelty kaikilla reaaliluvuilla.
- d) Jos funktio f on derivoituva, se ei ole integroituva.
- e) Funktiolla ja x -akselin väliin jäävän alueen pinta-ala välillä $[a, b]$ saadaan kaavalla $\int_a^b f(x) dx$, kun $f(x) \geq 0$ välillä $[a, b]$.
- f) Funktiolla $f(x)$ on ainakin kaksi nollakohtaa välillä $[a, b]$, kun käyrän ja x -akselin välisen alueen ala $A = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$.

- g) Analyysin peruslauseen mukaan $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$, kun F on jatkuvan funktion f jokin integraalifunktio.

Vihje:

- * Integraalifunktion käsite
- * Määrätyn integraalin ja integraalifunktion yhteys

Vastaus:

- a) tosi
- b) tosi
- c) epätosi
- d) epätosi
- e) tosi
- f) tosi
- g) epätosi

Ratkaisu:

- a) Tosi.
- b) Tosi.
- c) Epätosi. Epäjatkuvuuskohdassa funktiolla ei ole integraalifunktiota, koska integroimalla erikseen funktion h lausekkeet saadaan

$$H(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + C_1, & \text{kun } x < 1 \\ -3x + C_2, & \text{kun } x \geq 1 \end{cases}$$

Jatkuvuusehto antaa yhtälön

$$\frac{3}{2} \cdot 1 + C_1 = -3 + C_2$$

$$\Leftrightarrow C_1 = -3 - \frac{3}{2} + C_2 = -4\frac{1}{2} + C_2$$

Tällöin

$$H(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 - 4\frac{1}{2} + C_2, & \text{kun } x < 1 \\ -3x + C_2, & \text{kun } x \geq 1 \end{cases}$$

Huomataan, että $H'(x) = h(x)$, kun $x \neq 1$. Koska $\lim_{x \rightarrow 1^-} H'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = -3$ ja $\lim_{x \rightarrow 1^+} H'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = 3$, ei $H(1)$ ole olemassa. Se merkitsee, että funktiolla h ei ole integraalifunktiota, joka olisi määritelty kaikilla reaaliluvuilla.

- d) Epätosi. Väittämä ei ole tosi, mikä voidaan todistaa vastaesimerkin avulla: funktio $f(x) = x^3 + 2$ on derivoituva ja sen derivaatta on $f'(x) = 3x^2 + 2$. Funktio on myös integroitava. Sen integraalifunktio on $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x + C$.

e) Tosi.

f) Tosi.

g) Analyysin peruslauseen mukaan $\int_a^b f(x) dx = \left|_a^b F(x) = F(b) - F(a)\right.$, kun F on jatkuvan funktion f jokin integraalifunktio.

3. Integroi

a) $\int (x^2 + x + 2) dx$

b) $\int (2 + 3x^{20} - \frac{1}{2}x^4) dx$

c) $\int \frac{3}{x^3} dx$

Vihje:

* Suoria integrointikaavoja I

* Suoria integrointikaavoja II

* Osittaisintegrointi

Vastaus:

a) $\int (x^2 + x + 2) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$

b) $\int (2 + 3x^{20} - \frac{1}{2}x^4) dx = 2x + \frac{1}{7}x^{21} - \frac{1}{10}x^5 + C$

c) $\int \frac{3}{x^3} dx = \frac{-6}{x^2} + C$

Ratkaisu:

a) $\int (x^2 + x + 2) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$

b) $\int (2 + 3x^{20} - \frac{1}{2}x^4) dx = 2x + \frac{1}{7}x^{21} - \frac{1}{10}x^5 + C$

c) $\int \frac{3}{x^3} dx = \frac{-6}{x^2} + C$

4. Integroi

a) $\int (\frac{1}{2x} - 5 + e^{1+x}) dx$

b) $\int (\frac{4\cos(x)}{3}) dx$

c) $\int (7\sqrt[7]{u} + u^{\frac{1}{7}} - \frac{6}{\sqrt[7]{u}}) du$

$$d) \int (t^2 \sqrt{t}) dt = \frac{7}{2} t^3 \sqrt{t} + C$$

$$e) \int (\tan(r) + \sin(r)) dr$$

Vastaus:

$$a) \int \left(\frac{1}{2x} - 5 + e^{1+x} \right) dx = \frac{1}{2} \ln |2x| - 5x + e^{1+x} + C$$

$$b) \int \left(\frac{4 \cos(x)}{3} \right) dx = \frac{4}{3} \sin(x) + C$$

$$c) \int \left(7 \sqrt[7]{u} + u^{\frac{1}{7}} - \frac{6}{\sqrt[7]{u}} \right) du = 7(\sqrt[7]{u^8} + \sqrt[7]{u^6}) + C$$

$$d) \int (t^2 \sqrt{t}) dt = \frac{7}{2} \cdot t^3 \sqrt{t} + C$$

$$e) \int (\tan(r) + \sin(r)) dr = -\ln |\cos(r)| - \cos(r) + C$$

Ratkaisu:

$$a) \int \left(\frac{1}{2x} - 5 + e^{1+x} \right) dx = \frac{1}{2} \ln |2x| - 5x + e^{1+x} + C$$

$$b) \int \left(\frac{4 \cos(x)}{3} \right) dx = \frac{4}{3} \sin(x) + C$$

$$c) \int \left(7 \sqrt[7]{u} + u^{\frac{1}{7}} - \frac{6}{\sqrt[7]{u}} \right) du = 7(\sqrt[7]{u^8} + \sqrt[7]{u^6}) + C$$

$$d) \int (t^2 \sqrt{t}) dt = \frac{t^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} = \frac{7}{2} \cdot t^3 \sqrt{t} + C$$

$$e) \int (\tan(r) + \sin(r)) dr = -\ln |\cos(r)| - \cos(r) + C$$

5. Osoita, että funktio $F : F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ on funktion $f : f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ eräs integraalifunktio.

Vihje: Derivaatta on integraalin käänteinen toimenpide.

Ratkaisu: Jos funktio $F(x)$ on funktion $f(x)$ eräs integraalifunktio, $F'(x) = f(x)$. Saadaan

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{2} (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \\ &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = f(x). \end{aligned}$$

$F(x)$ on siis eräs funktion $f(x)$ integraalifunktio.

□

6.

a) Määritä funktion $f : f(x) = x - 1$ se integraalifunktio F , jonka kuvaaja kulkee pisteen $(2, 1)$ kautta.

b) Määritä se funktion $f : f(x) = 2x + 1$ integraalifunktio F , jonka kuvaaja sivuaa suoraa $y = -3x + 3$.

Vastaus:

a) $F(x) = \frac{x^2}{2} - x + 1$

b) $F(x) = x^2 + x + 1$

Ratkaisu:

a) Integroidaan funktio:

$$F(x) = \int (x-1) dx = \frac{x^2}{2} - x + C.$$

Vakion C arvo saadaan sijoittamalla piste $(2, 1)$:

$$F(2) = 2 - 2 + C = 1$$

$$\Leftrightarrow C = 1$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} - x + 1.$$

b) Integroidaan funktio:

$$F(x) = \int (2x+1) dx = \frac{2x^2}{2} + x + C = x^2 + x + C.$$

Ratkaistaan suoran ja integraalin yhteinen piste. Muodostetaan yhtälö

$$x^2 + x + C = -3x + 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + (3+C) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot (3+C)}}{2}.$$

Jotta suoralla ja integraalifunktiolla olisi vain yksi yhteinen piste, on diskriminantin oltava nolla.

$$D = 16 - 4 \cdot 1 \cdot (3+C) = 0$$

$$\Leftrightarrow 16 - 12 - 4C = 0$$

$$\Leftrightarrow 4C = 4$$

$$\Leftrightarrow C = 1$$

$$\Rightarrow F(x) = x^2 + x + 1$$

7. Tutki, onko yhtälö tosi.

a) $\int (5x+1)^3 dx = \frac{1}{20}(5x+1)^4 + C$

b) $\int \sqrt{4x+3} dx = \frac{2}{3} \sqrt{(4x+3)^3} + C$

c) $\int \cos(3x) dx = \frac{1}{3} \sin(3x) + C$

d) $\int \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) dx = \frac{1}{3} \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) + C$

e) $\int e^{\frac{x}{2}} dx = \ln 2 \cdot e^{\frac{x}{2}} + C$

Vihje:

* Sijoitusmenettely

Vastaus:

- a) tosi
- b) epätosi
- c) tosi
- d) tosi
- e) epätosi

Ratkaisu:

- a) Tosi. Käytetään sijoituskeinoa:

$$5x + 1 = t$$

$$\Leftrightarrow 5 dx = dt$$

$$\Leftrightarrow dx = \frac{dt}{5}$$

$$\int (5x + 1)^3 dx = \int \frac{t^3}{5} dt = \frac{1}{5} \cdot \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{20} (5x + 1)^4 + C$$

- b) Epätosi. Käytetään sijoituskeinoa:

$$4x + 3 = t$$

$$\Leftrightarrow 4 dx = dt$$

$$\Leftrightarrow dx = \frac{dt}{4}$$

$$\int \sqrt{4x + 3} dx = \int t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{dt}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{6} \sqrt{t^3} + C = \frac{1}{6} \sqrt{(4x + 3)^3} + C$$

- c) Tosi. Käytetään sijoituskeinoa:

$$3x = t$$

$$\Leftrightarrow 3 dx = dt$$

$$\Leftrightarrow dx = \frac{dt}{3}$$

$$\int \cos(3x) dx = \int \cos(t) \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \sin(t) + C = \frac{1}{3} \sin(3x) + C$$

- d) Tosi. Käytetään sijoituskeinoa:

$$\frac{\pi}{3} - 3x = t$$

$$\Leftrightarrow -3 dx = dt$$

$$\Leftrightarrow dx = \frac{dt}{-3}$$

$$\int \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) dx = \int \sin(t) \frac{dt}{-3} = -\frac{1}{3} (-\cos(t)) + C = \frac{1}{3} \cos(t) + C = \frac{1}{3} \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) + C$$

- e) Epätosi. Saadaan

$$\int e^{\frac{x}{2}} dx = x \cdot e^{\frac{x}{2}} + C$$

8. Tutki, onko yhtälö tosi.

- a) $\int \frac{dx}{2x+1} = \ln|2x+1| + C$
- b) $\int x(x^2+1)^3 dx = \frac{1}{8}(x^2+1)^4 + C$
- c) $\int x^2(x^3-1)^3 dx = \frac{1}{12}(x^3-1)^4 + C$
- d) $\int xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$

Vastaus:

- a) epätosi
- b) tosi
- c) epätosi
- d) tosi

Ratkaisu:

- a) Epätosi. Käytetään sijoituskeinoa:

$$2x+1=t$$

$$\Leftrightarrow 2dx=dt$$

$$\Leftrightarrow dx=\frac{dt}{2}$$

$$\int \frac{dx}{2x+1} = \int \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \ln|t| + C$$

- b) Tosi. Käytetään sijoituskeinoa:

$$x^2+1=t$$

$$\Leftrightarrow 2xdx=dt$$

$$\Leftrightarrow dx=\frac{dt}{2x}$$

$$\int x(x^2+1)^3 dx = \int \frac{t^3}{2} dt = \frac{1}{8}t^4 + C = \frac{1}{8}(x^2+1)^4 + C$$

- c) Epätosi. Käytetään sijoituskeinoa:

$$x^3-1=t$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 dx=dt$$

$$\Leftrightarrow dx=\frac{dt}{3x^2}$$

$$\int x^2(x^3-1)^3 dx = \int \frac{t^3}{3} dt = \frac{1}{12}t^4 + C = \frac{1}{12}(x^3-1)^4 + C$$

- d) Tosi. Käytetään sijoituskeinoa:

$$-x^2=t$$

$$\Leftrightarrow -2xdx=dt$$

$$\Leftrightarrow dx=\frac{dt}{-2x}$$

$$\int xe^{-x^2} dx = \int \frac{e^t}{-2} dt = -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

9. Integroi

a) $\int \sin(x) \cos(x) dx$

b) $\int (\sin(x))^2 \cos(x) dx$

c) $\int \frac{dx}{x \ln x}$

d) $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$

Vastaus:

a) $\int \sin(x) \cos(x) dx = \frac{(\sin(x))^2}{2} + C$

b) $\int (\sin(x))^2 \cos(x) dx = \frac{(\sin(x))^3}{3} + C$

c) $\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln |\ln x| + C$

d) $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \ln(e^x + 1) + C$

Ratkaisu:

a) Käytetään sijoituskeinoa:

$$\sin(x) = t$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) dx = dt$$

$$\Leftrightarrow dx = \frac{dt}{\cos(x)}$$

$$\int \sin(x) \cos(x) dx$$

$$= \int t dt$$

$$= \frac{t^2}{2} + C$$

$$= \frac{(\sin(x))^2}{2} + C$$

b) Käytetään sijoituskeinoa, ks. tehtävä 9 a)

$$\int (\sin(x))^2 \cos(x) dx$$

$$= \int t^2 dt$$

$$= \frac{t^3}{3} + C$$

$$= \frac{(\sin(x))^3}{3} + C$$

c) Käytetään sijoituskeinoa:

$$\ln(x) = t$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} dx = dt$$

$$\Leftrightarrow dx = x dt$$

$$\int \frac{dx}{x \ln x}$$

$$= \int \frac{dt}{t}$$

$$= \ln(t) + C$$

$$= \ln(\ln(x)) + C$$

d) Käytetään sijoituskeinoa:

$$e^x + 1 = t$$

$$\Leftrightarrow e^x dx = dt$$

$$\Leftrightarrow dx = \frac{dt}{e^x}$$

$$\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|e^x + 1| + C = \ln(e^x + 1) + C$$

10. Integroi

a) $\int (\sin(x))^2 dx$

b) $\int \frac{2x-3}{x+1} dx$

c) $\int \frac{x^3-2x}{x+1} dx$

Vastaus:

a) $\int (\sin(x))^2 dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + C$

b) $\int \frac{2x-3}{x+1} dx = 2x + 2 - 5\ln|x+1| + C$

c) $\int \frac{x^3-2x}{x+1} dx = \frac{(x+1)^3}{3} - \frac{3}{2}(x+1)x^2 + x + 1 + C$

Ratkaisu:

a) $\int (\sin(x))^2 dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\right) dx = \frac{1}{2}x - \int \frac{1}{2}\cos(2x) dx$

Käytetään sijoituskeinoa:

$$2x = t$$

$$\Leftrightarrow 2 dx = dt$$

$$\Leftrightarrow dx = \frac{dt}{2}$$

$$\frac{1}{2}x - \int \frac{1}{2}\cos(2x) dx = \frac{1}{2}x - \int \frac{1}{2}\cos(t) dt = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(t) + C = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + C$$

b) Käytetään sijoituskeinoa:

$$x + 1 = t$$

$$\Leftrightarrow dx = dt$$

$$\Leftrightarrow x = t - 1$$

$$\int \frac{2x-3}{x+1} dx = \int \frac{2(t-1)-3}{t} dt = \int 2 - \frac{5}{t} dt = 2t - 5\ln|t| + C = 2x + 2 - 5\ln|x+1| + C$$

c) Käytetään sijoituskeinoa, ks. tehtävä 10 b)

$$\int \frac{x^3-2x}{x+1} dx = \int \frac{(t-1)^3-2(t-1)}{t} dt = \int \frac{t^3-3t^2+t}{t} dt$$

$$= \int (t^2 - 3t + 1) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{3}{2}t^2 + t + C$$

$$= \frac{(x+1)^3}{3} - \frac{3}{2}(x+1)x^2 + x + 1 + C$$

11.

- a) Olkoon F funktion $f : f(x) = |x - 2|$ se integraalifunktio, jolle $F(0) = 3$. Laske $F(3)$.
- b) $f'(x) = |x - 2| + |x|$ ja $f(3) = 0$. Määritä funktio f .

Vihje: Integraalifunktion F :n tulee olla jatkuva.

Vastaus:

$$\text{a) } F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 2x + 7, & x \geq 2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3, & x < 2 \end{cases}$$

$$F(3) = \frac{1}{2} \cdot 9 - 6 + 7 = 5\frac{1}{2}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x - 7, & x \leq 0 \\ 2x - 7, & 0 < x < 2 \\ x^2 - 2x - 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

Ratkaisu:

- a) Integroidaan funktio

$$f(x) = |x - 2| = \begin{cases} x - 2, & x \geq 2 \\ -x + 2, & x < 2 \end{cases}$$

Saadaan

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 2x + C_1, & x \geq 2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x + C_2, & x < 2 \end{cases}.$$

F :n tulee olla jatkuva kohdassa $x = 2$. Sijoitetaan $x = 2$ yhtälöparin lausekkeisiin ja lasketaan vakio C_2 :

$$2 - 4 + C_1 = -2 + 4 + C_2$$

$$\Leftrightarrow C_2 = -4 + C_1.$$

Integraalifunktioksi saadaan

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 2x + C, & x \geq 2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 4 + C, & x < 2 \end{cases}$$

Ehdon $F(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 4 + C = 3 \Leftrightarrow C = 7$ avulla integraalifunktioksi saadaan

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 2x + 7, & x \geq 2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3, & x < 2 \end{cases}$$

Lisäksi

$$F(3) = \frac{1}{2} \cdot 9 - 6 + 7 = 5\frac{1}{2}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + C_1, & x \leq 0 \\ 2x + C_2, & 0 < x < 2 \\ x^2 - 2x + C_2, & x \geq 2 \end{cases}$$

$f(x)$:n tulee olla jatkuva rajakohdissa, jolloin $C_1 = C_2$ ja $4 + C_2 = C_3$. (ks.edellinen)

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + C_1, & x \leq 0 \\ 2x + C, & 0 < x < 2 \\ 2x^2 - 2x + 4 + C, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$f(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 + 4 + C = 0 \\ \Leftrightarrow C = -7$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x - 7, & x \leq 0 \\ 2x - 7, & 0 < x < 2 \\ 2x^2 - 2x - 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

12. Laske

a) $\int_{-1}^2 (2x - 3)^2 dx$

b) $\int_0^3 \sqrt{9 - 3x} dx$

c) $\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{3x+4}} dx$

d) $\int_0^t \cos(t - y) dy$

e) $\int_0^1 \left(\int_0^1 (2x + t)^2 dt \right) dx$

Vastaus:

a) 21

b) 6

c) $\frac{2}{3} \left(\sqrt{\frac{11}{2}} - 1 \right)$

d) $\sin(t)$

e) $\frac{8}{3}$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int_{-1}^2 (2x - 3)^2 dx \\ &= \int_{-1}^2 (4x^2 - 12x + 9) dx \\ &= \left/_{-1}^2 \frac{4x^3}{3} - 6x^2 + 9x \right. \\ &= \frac{32}{3} - 24 + 18 - \left(-\frac{4}{3} - 6 - 9 \right) = 21 \end{aligned}$$

b) Käytetään sijoituskeinoa:

$$9 - 3x = t$$

$$\Leftrightarrow -3dx = dt$$

$$\Leftrightarrow dx = \frac{dt}{-3}$$

$$\int_0^3 \sqrt{9-3x} dx$$

$$= \int_0^3 \sqrt{t} \frac{dt}{-3}$$

$$= \left/_{-3}^3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right.$$

$$= \left/_{-3}^3 - \frac{2}{9} \sqrt{t^3}\right.$$

$$= \left/_{-3}^3 - \frac{2}{9} \sqrt{(9-3x)^3}\right.$$

$$= -\frac{2}{9} \sqrt{(9-3 \cdot 3)^3} - \left(-\frac{2}{9} \sqrt{(9-3 \cdot 0)^3}\right) = 6$$

c) Käytetään sijoituskeinoa:

$$3x - 4 = t$$

$$\Leftrightarrow 3dx = dt$$

$$\Leftrightarrow dx = \frac{dt}{3}$$

Integroidaan sivussa:

$$\int \frac{1}{\sqrt{3x+4}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{t} + C = \frac{2}{3} \sqrt{3x+4} + C$$

$$\Rightarrow \left/_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{2}{3} \sqrt{3x+4}\right.$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{3\left(\frac{1}{2}\right) + 4} - \frac{2}{3} \sqrt{3(-1) + 4}$$

$$= \frac{2}{3} \left(\sqrt{\frac{11}{2}} - 1\right)$$

d) Käytetään sijoituskeinoa:

$$t - y = h$$

$$\Leftrightarrow -dy = dh$$

$$\Leftrightarrow dy = -dh$$

Integroidaan sivussa:

$$\int \cos(t-y) dy = \int \cos(h) - dh = -\sin(h) + C = -\sin(t-y) + C$$

$$\Rightarrow \left/_{-t}^t -\sin(t-y) = -\sin(t-t) + \sin(t) = \sin(t)\right.$$

e) $\int_0^1 \left(\int_0^1 (2x+t)^2 dt \right) dx$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 (t^2 + 4xt + 4x^2) dt \right) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{3}t^3 + 2xt^2 + 4x^2t \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + 2x + 4x^2 \right) dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x + x^2 + \frac{4x^3}{3} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + 1 - 0 \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

13. (*) Ratkaise kaksoisepähtälö $0 < \int_{-1}^x \frac{2t}{t^2+1} dt < \ln 10$, kun $x > -1$.

Vastaus: $1 < x < \sqrt{19}$

Ratkaisu: Integroidaan itse funktio. Käytetään sijoituskeinoa:

$$t^2 + 1 = h$$

$$\Leftrightarrow 2t dt = dh$$

$$\Leftrightarrow dt = \frac{dh}{2t}$$

Integroidaan sivussa:

$$\int \frac{2t}{t^2+1} dt = \int \frac{2t}{h} \frac{dh}{2t} = \int \frac{dh}{h} = \ln|h| + C = \ln|t^2 + 1| + C = \ln(t^2 + 1) + C$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^x \frac{2t}{t^2+1} dt = \int_{-1}^x \ln(t^2 + 1) = \ln(x^2 + 1) - \ln(2) = \ln\left(\frac{x^2+1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 0 < \ln\left(\frac{x^2+1}{2}\right) < \ln 10, \text{ kun } x > -1$$

$$\Leftrightarrow \ln 1 < \ln\left(\frac{x^2+1}{2}\right) < \ln 10$$

$$\Leftrightarrow 1 < \frac{x^2+1}{2} < 10$$

$$\Leftrightarrow 2 < x^2 + 1 < 20$$

$$\Leftrightarrow 1 < x^2 < 19$$

$$\Leftrightarrow 1 < x < \sqrt{19}, \text{ kun } x > -1$$

14. (*) Laske $\int_{-2}^2 (|x^2 + 1| + |x - 1|) dx$.

Vihje: Lausekkeen itseisarvot jakavat tarkastelun eri väleihin.

Vastaus: $14\frac{1}{3}$

Ratkaisu: $\int_{-2}^2 (|x^2 + 1| + |x - 1|) dx$

$$= \int_{-2}^2 ((x^2 + 1) + |x - 1|) dx$$

$$= \int_{-2}^1 (x^2 + 1 + 1 - x) dx + \int_1^2 (x^2 + 1 + x - 1) dx$$

$$= \int_{-2}^1 (x^2 - x + 2) dx + \int_1^2 (x^2 + x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-2}^1 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) dx + \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) dx \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(-\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4 \right) + \frac{8}{3} + \frac{4}{2} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) \\
&= 14\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

15. (*) Määritä funktion $f(x) = \int_0^2 |x-t| dt$ pienin arvo. Piirrä funktion f kuvaaja.

Vihje:

- * Tarkastele lausekkeen arvoa muuttujan x eri väleillä.
- * Pienimmän arvon voi tulkita esimerkiksi kuvaajasta.

Vastaus: Pienin arvo on $f(1) = 1$.

Ratkaisu: Integroitaessa tarkastellaan funktiota eri x :n arvoilla. Saadaan kolme tapausta:

1) $x \leq 0$:

$$f(x) = \int_0^2 (-x+t) dt = \int_0^2 \left(\frac{t^2}{2} - xt \right) = \frac{4}{2} - 2x - 0 = 2 - 2x$$

2) $x \geq 2$:

$$f(x) = \int_0^2 (x-t) dt = \int_0^2 \left(xt - \frac{t^2}{2} \right) = 2x - 2$$

3) $0 < x < 2$:

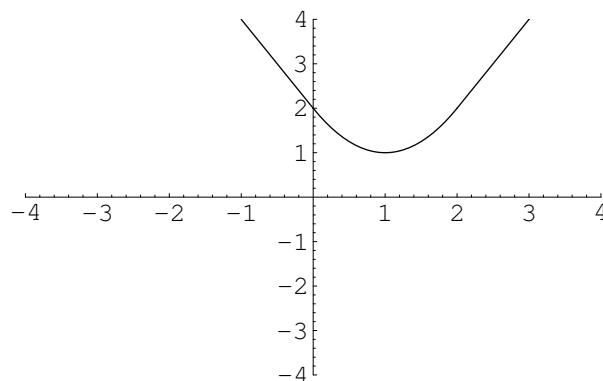
$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^x (x-t) dt + \int_x^2 (t-x) dt = \int_0^x \left(xt - \frac{t^2}{2} \right) + \int_x^2 \left(\frac{t^2}{2} - xt \right) = x^2 - \frac{x^2}{2} - 2x + 2 - \left(\frac{x^2}{2} - \right. \\
&\quad \left. x^2 \right) = x^2 - 2x + 2
\end{aligned}$$

Kuvaajasta tarkastelemalla nähdään, että funktio saavuttaa pienimmän arvonsa välillä $0 < x < 2$. Pienin arvo löytyy tämän välin derivaatan nollakohdasta:

$$f'(x) = 2x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 1.$$



Pienin arvo on siis $f(1) = 1$.

16. (*) Sievennä $f(x) = \int_0^3 \left| \frac{x}{2} - t \right| dt$. Piirrä funktion f kuvaaja.

Vastaus: $f(x) = \begin{cases} -1\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}, & x \leq 0 \\ 1\frac{1}{2}x - 4\frac{1}{2}, & x \geq 6 \\ \frac{1}{4}x^2 - 1\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}, & 0 < x < 6 \end{cases}$

Ratkaisu: Tarkastellaan funktiota eri x :n arvoilla. Saadaan kolme tapausta:

1) $\frac{x}{2} \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$:

$$f(x) = \int_0^3 \left(-\frac{x}{2} + t\right) dt = \int_0^3 \left(-\frac{xt}{2} + \frac{t^2}{2}\right) = -1\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$$

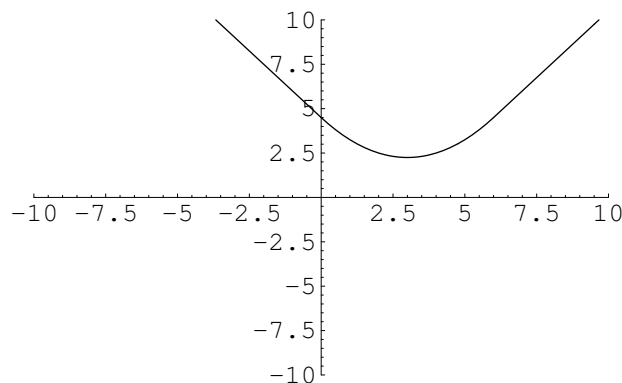
2) $\frac{x}{2} \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 6$:

$$f(x) = \int_0^3 \left(\frac{x}{2} - t\right) dt = \int_0^3 \left(\frac{xt}{2} - \frac{t^2}{2}\right) = 1\frac{1}{2}x - 4\frac{1}{2}$$

3) $0 < \frac{x}{2} < 3 \Leftrightarrow 0 < x < 6$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\frac{x}{2}} \left(\frac{x}{2} - t\right) dt + \int_{\frac{x}{2}}^3 \left(-\frac{x}{2} + t\right) dt = \int_0^{\frac{x}{2}} \left(\frac{xt}{2} - \frac{t^2}{2}\right) + \int_{\frac{x}{2}}^3 \left(-\frac{xt}{2} + \frac{t^2}{2}\right) \\ &= \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{8} + 4\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}x - \left(-\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{8}\right) = \frac{1}{4}x^2 - 1\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}, & x \leq 0 \\ 1\frac{1}{2}x - 4\frac{1}{2}, & x \geq 6 \\ \frac{1}{4}x^2 - 1\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}, & 0 < x < 6 \end{cases}$$



17.

a) Laske käyrän $y = -x^2 - 1$, x -akselin sekä suorien $x = -\frac{1}{2}$ ja $x = 1$ rajoittaman alueen pinta-ala.

b) Määritä käyrän $y = x^2 - x$, x -akselin ja suoran $x = 2$ rajoittaman, kaksiosaisen alueen pinta-ala.

c) Laske käyrien $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2$, $y = \frac{1}{2}x + 3$, $x = 0$ ja $x = 2$ rajoittaman alueen pinta-ala.

Vihje:

- * Määätyn integraalin laskusäännöt
- * Esimerkkejä määrätyn integraalin laskemisesta

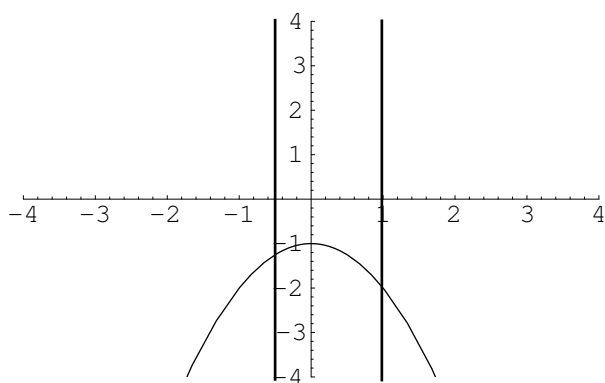
Vastaus:

a) $A = 1\frac{7}{8}$

b) $A = 1$

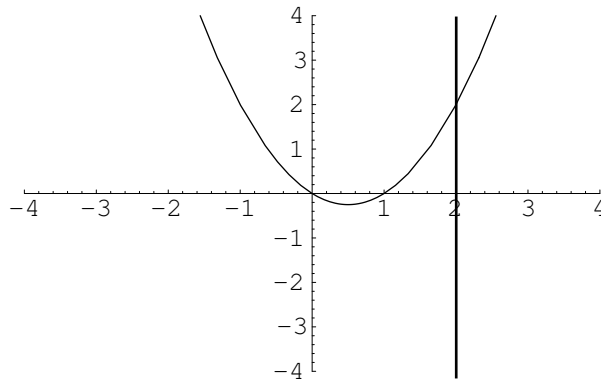
c) $A = 3\frac{2}{3}$

Ratkaisu: a)



Kuvaajasta nähdään, että kyseinen alue on x -akselin alapuolella, joten määrätyn integraalin kaava antaa negatiivisen arvon. Ala saadaan laskemalla funktion $y = -x^2 - 1$ määrätty integraali välillä $[-\frac{1}{2}, 1]$.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\frac{1}{2}}^1 (-x^2 - 1) dx \\ &= \left/_{-\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{-x^3}{3} - x \right) \right. \\ &= -\frac{1}{3} - 1 - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \right) \\ &= -\frac{8}{24} - \frac{24}{24} - \frac{1}{24} - \frac{12}{24} = -1\frac{7}{8} \text{ b)} \end{aligned}$$

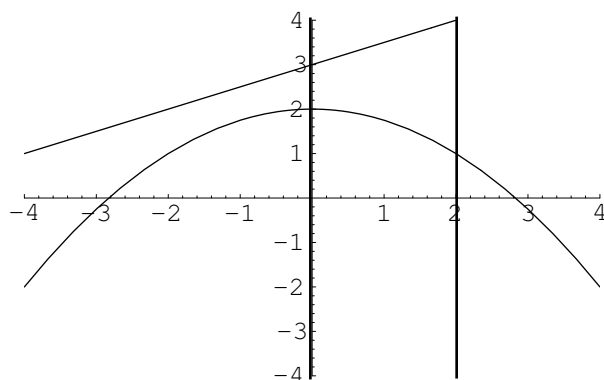


Kuvaajasta nähdään, että välillä $[0, 1]$ alue on x -akselin alapuolella, joten määrätyn integraalin kaava antaa negatiivisen arvon. Välillä $[1, 2]$ alue taas on x -akselin yläpuolella, jolloin määrätyn integraalin kaavasta saatu arvo on positiivinen. Kokonaispinta-ala saadaan laskemalla yhteen näiden kahden alueen alat.

$$\begin{aligned} A_1 &= - \int_0^1 (x^2 - x) dx \\ &= \left/_0^1 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \right. \\ &= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_1^2 (x^2 - x) dx \\ &= \left/_1^2 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \right. \\ &= \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$A = A_1 + A_2 = -\frac{5}{6} + \frac{5}{6} = 0 \text{ c)}$$



Koska funktio $y = \frac{1}{2}x + 3$ rajaa aluetta yläpuolelta ja funktio $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2$ alapuolelta saadaan alueen pinta-ala integroimalla funktioiden erotus välillä $[0, 2]$:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x + 3 - \left(-\frac{1}{4}x^2 + 2 \right) \right) dx \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \right) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{4} + x \right]_0^2 \\ &= -\frac{8}{12} + 1 + 2 - 0 = 3\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

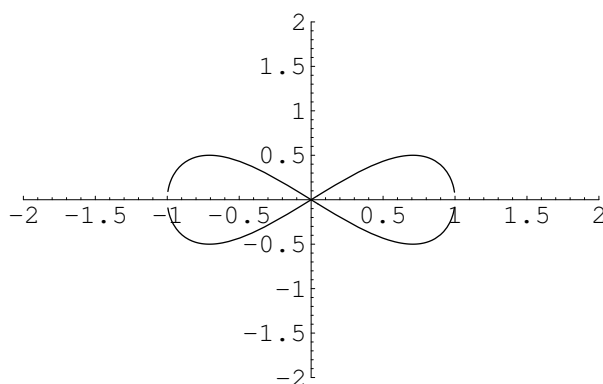
18. Määritä käyrän $y^2 = x^2 - x^4$ rajaaman kuvion pinta-ala.

Vihje:

- * Hyödynnä kuvion symmetriaa pinta-alan laskemisessa.
- * Huomaa reaalisuusehto

Vastaus: $A = 1\frac{1}{3}$

Ratkaisu:



Saadaan $y^2 = x^2 - x^4 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{x^2(1 - x^2)}$. Koska pinta-ala on symmetrinen x -akselin suhteen, riittää, että lasketaan x -akselin yläpuolella olevan alueen pinta-ala ja kerrotaan se kahdella. Myös akselin yläpuolella olevan alueen ala koostuu kahdesta keskenään symmetrisestä osiosta, joista vain toisen ala on syytä laskea.

Tarkastellaan funktiota $y = \sqrt{x^2(1-x^2)}$. Lasketaan funktion nollakohdat:

$$x^2(1-x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \vee 1-x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm 1$$

.

Saadaan reaalisuusehto:

$$x^2(1-x^2) \geq 0$$

$\Leftrightarrow x \geq 0$ tai $1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ tai $x \leq \pm 1$. Merkkikaaviosta nähdään, että funktion reaalisuusehto täyttyy välillä $[-1, 1]$. Merkitään x -akselin yläpuolelle jäävän alueen pinta-alaa välillä $[0, 1]$ A_1 :

$$A_1 = \int_0^1 (\sqrt{x^2(1-x^2)}) dx = \int_0^1 (x\sqrt{1-x^2}) dx.$$

Integroidaan sivussa ja käytetään sijoituskeinoa:

$$1-x^2 = t$$

$$\Leftrightarrow -2x dx = dt$$

$$\Leftrightarrow dx = \frac{dt}{-2x}$$

$$\Rightarrow \int x\sqrt{1-x^2} dx = \int x\sqrt{t} \frac{dt}{-2x}$$
$$= \int \sqrt{t} \frac{dt}{-2} = -\frac{1}{3}\sqrt{t^3} + C = -\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + C$$

$$\Rightarrow A_1 = \int_0^1 (x\sqrt{1-x^2}) dx$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}(1-1)^3 + \frac{1}{3}(1-0)^3 = \frac{1}{3}$$

Saadaan kokonaisala $A = 4 \cdot A_1 = 1\frac{1}{3}$.

19. Käyrän $y = x^2 - 1$ pisteiden $(1, 0)$ ja $(2, 3)$ välinen kaari pyörrähtää

a) x -akselin ja

b) y -akselin

ympäri. Laske muodostuvan pyörähdyskappaleen tilavuus.

Vihje:

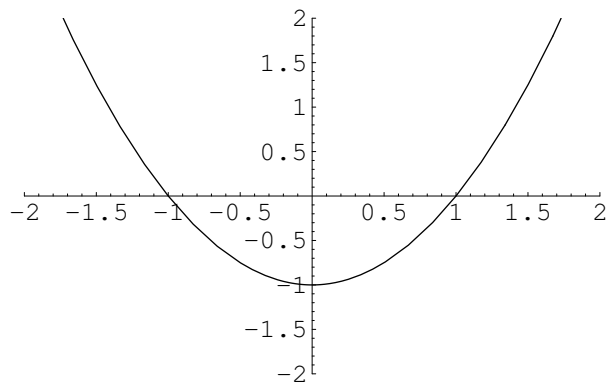
* Pyörähdyspinnan ala

Vastaus:

a) $2\frac{8}{15}\pi$

b) $7\frac{1}{2}\pi$

Ratkaisu:



a) Pyörähdyskappaleen tilavuus saadaan integroimalla x -akselin suhteen välillä $[1, 2]$ kaavan

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx \text{ avulla:}$$

$$V = \pi \int_1^2 (x^2 - 1)^2 dx$$

$$= \pi \int_1^2 (x^4 - 2x^2 + 1) dx$$

$$= \pi \left/ \frac{1}{5} \left(\frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}x^3 + x \right) \right.$$

$$= \pi \left(\frac{32}{5} - \frac{16}{3} + 2 \right) - \pi \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 \right)$$

$$= 2\frac{8}{15}\pi.$$

b) Muunnetaan funktio muotoon $x = \sqrt{y+1}$. Pyörähdyskappaleen tilavuus saadaan integroimalla y -akselin suhteen välillä $[0, 3]$ kaavan

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx \text{ avulla:}$$

$$V = \pi \int_0^3 (\sqrt{y+1})^2 dy$$

$$= \pi \int_0^3 (y+1) dy$$

$$= \pi \left/ \frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{2} + y \right) \right.$$

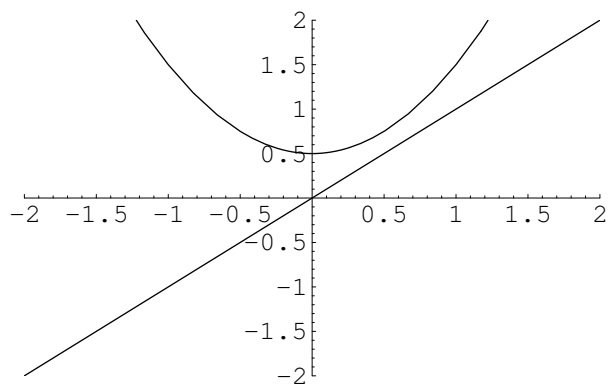
$$= \pi \left(\frac{9}{2} + 3 \right) - \pi(0 + 0)$$

$$= 7\frac{1}{2}\pi.$$

20. Funktioiden $f(x) = x$ ja $g(x) = \frac{1}{2} + x^2$ kuvaajien väliin jäävä alue välillä $[0, 3]$ pyörähtää x -akselin ympäri. Laske syntyvän kappaleen tilavuus.

Vastaus: $49\frac{7}{20}$

Ratkaisu:



Syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus saadaan onton pyörähdyskappaleen tilavuuden kaavalla:

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^3 |(\tfrac{1}{2} + x^2)^2 - x^2| dx \\
 &= \pi \int_0^3 |\tfrac{1}{4} + x^4| dx \\
 &= \pi \int_0^3 (\tfrac{1}{4} + x^4) dx \\
 &= \pi \left[\tfrac{1}{4}x + \tfrac{x^5}{5} \right]_0^3 \\
 &= \pi \left(\tfrac{243}{5} + \tfrac{3}{4} \right) \\
 &= 49 \tfrac{7}{20} \pi.
 \end{aligned}$$