

Integraalilaskenta

1.

- a) Mikä on integraalifunktio ja miten derivaatta liittyy siihen? Anna esimerkki.
- b) Mitä määrätty integraali tietyllä välillä x tarkoittaa?

Vihje:

- * Integraali
- * Määrätyn integraalin määritelmä

2. Ovatko alla olevat väittämät tosia? Perustele tai anna vastaesimerkki.

- a) Jos F on jokin funktion f integraalifunktio, niin kaikki f :n integraalifunktiot ovat muotoa $F + C$, jossa C on vakio.
- b) Jokaisella jatkuvalla funktiolla on integraalifunktio.
- c) Paloittaisella funktiolla $h(x) = \begin{cases} 3x, & \text{kun } x < 1 \\ -3, & \text{kun } x \geq 1 \end{cases}$ on integraalifunktio, joka on määritelty kaikilla reaaliluvuilla.
- d) Jos funktio f on derivoituva, se ei ole integroituva.
- e) Funktion ja x -akselin väliin jäävän alueen pinta-ala välillä $[a, b]$ saadaan kaavalla $\int_a^b f(x) dx$, kun $f(x) \geq 0$ välillä $[a, b]$.
- f) Funktiolla $f(x)$ on ainakin kaksi nollakohtaa välillä $[a, b]$, kun käyrän ja x -akselin välisen alueen ala $A = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$.
- g) Analyysin peruslauseen mukaan $\int_a^b f(x) dx = \left|_a^b F(x) = F(a) - F(b)\right.$, kun F on jatkuvan funktion f jokin integraalifunktio.

Vihje:

- * Integraalifunktion käsite
- * Määrätyn integraalin ja integraalifunktion yhteys

3. Integroi

- a) $\int (x^2 + x + 2) dx$
- b) $\int (2 + 3x^{20} - \frac{1}{2}x^4) dx$
- c) $\int \frac{3}{x^3} dx$

Vihje:

- * Suoria integrointikaavoja I
- * Suoria integrointikaavoja II
- * Osittaisintegrointi

4. Integroi

- a) $\int (\frac{1}{2x} - 5 + e^{1+x}) dx$
- b) $\int (\frac{4\cos(x)}{3}) dx$
- c) $\int (7\sqrt[7]{u} + u^{\frac{1}{7}} - \frac{6}{\sqrt[7]{u}}) du$
- d) $\int (t^2\sqrt{t}) dt = \frac{7}{2}t^3\sqrt{t} + C$
- e) $\int (\tan(r) + \sin(r)) dr$

5. Osoita, että funktio $F : F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ on funktion $f : f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ eräs integraalifunktio.

Vihje: Derivaatta on integraalin käänteinen toimenpide.

6.

- a) Määritä funktion $f : f(x) = x - 1$ se integraalifunktio F , jonka kuvaaja kulkee pisteen $(2, 1)$ kautta.
- b) Määritä se funktion $f : f(x) = 2x + 1$ integraalifunktio F , jonka kuvaaja sivuaa suoraa $y = -3x + 3$.

7. Tutki, onko yhtälö tosi.

- a) $\int (5x + 1)^3 dx = \frac{1}{20}(5x + 1)^4 + C$
- b) $\int \sqrt{4x + 3} dx = \frac{2}{3}\sqrt{(4x + 3)^3} + C$
- c) $\int \cos(3x) dx = \frac{1}{3}\sin(3x) + C$

$$d) \int \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) dx = \frac{1}{3} \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) + C$$

$$e) \int e^{\frac{x}{2}} dx = \ln 2 \cdot e^{\frac{x}{2}} + C$$

Vihje:

* Sijoitusmenettely

8. Tutki, onko yhtälö tosi.

$$a) \int \frac{dx}{2x+1} = \ln|2x+1| + C$$

$$b) \int x(x^2+1)^3 dx = \frac{1}{8}(x^2+1)^4 + C$$

$$c) \int x^2(x^3-1)^3 dx = \frac{1}{12}(x^3-1)^3 + C$$

$$d) \int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

9. Integroi

$$a) \int \sin(x) \cos(x) dx$$

$$b) \int (\sin(x))^2 \cos(x) dx$$

$$c) \int \frac{dx}{x \ln x}$$

$$d) \int \frac{e^x}{e^x+1} dx$$

10. Integroi

$$a) \int (\sin(x))^2 dx$$

$$b) \int \frac{2x-3}{x+1} dx$$

$$c) \int \frac{x^3-2x}{x+1} dx$$

11.

a) Olkoon F funktion $f : f(x) = |x-2|$ se integraalifunktio, jolle $F(0) = 3$. Laske $F(3)$.

b) $f'(x) = |x-2| + |x|$ ja $f(3) = 0$. Määritä funktio f .

Vihje: Integraalifunktion F :n tulee olla jatkuva.

12. (*) Ratkaise kaksoisepäyhtälö $0 < \int_{-1}^x \frac{2t}{t^2+1} dt < \ln 10$, kun $x > -1$.

13. (*) Laske $\int_{-2}^2 (|x^2 + 1| + |x - 1|) dx$.

Vihje: Lausekkeen itseisarvot jakavat tarkastelun eri väleihin.

14. (*) Määritä funktion $f(x) = \int_0^2 |x - t| dt$ pienin arvo. Piirrä funktion f kuvaaja.

Vihje:

- * Tarkastele lausekkeen arvoa muuttujan x eri väleillä.
- * Pienimmän arvon voi tulkita esimerkiksi kuvaajasta.

15. (*) Sievennä $f(x) = \int_0^3 \left| \frac{x}{2} - t \right| dt$. Piirrä funktion f kuvaaja.

16.

- a) Laske käyrän $y = -x^2 - 1$, x -akselin sekä suorien $x = -\frac{1}{2}$ ja $x = 1$ rajoittaman alueen pinta-ala.
- b) Määritä käyrän $y = x^2 - x$, x -akselin ja suoran $x = 2$ rajoittaman, kaksiosaisen alueen pinta-ala.
- c) Laske käyrien $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2$, $y = \frac{1}{2}x + 3$, $x = 0$ ja $x = 2$ rajoittaman alueen pinta-ala.

Vihje:

- * Määrätyn integraalin laskusäännöt
- * Esimerkkejä määrätyn integraalin laskemisesta

17. Määritä käyrän $y^2 = x^2 - x^4$ rajaaman kuvion pinta-ala.

Vihje:

- * Hyödynnä kuvion symmetriaa pinta-alan laskemisessa.
- * Huomaa reaalisuusehto

18. Käyrän $y = x^2 - 1$ pisteiden $(1, 0)$ ja $(2, 3)$ välinen kaari pyörähtää

a) x -akselin ja

b) y -akselin

ympäri. Laske muodostuvan pyörähdyskappaleen tilavuus.

Vihje:

* Pyörähdyspinnan ala

19. Funktioiden $f(x) = x$ ja $g(x) = \frac{1}{2} + x^2$ kuvaajien väliin jäävä alue välillä $[0, 3]$ pyörähtää x -akselin ympäri. Laske syntyvän kappaleen tilavuus.