

Geometria ja vektorit

1. Ovatko alla olevat väittämät tosia? Perustele tai anna vastaesimerkki.

- a) Ympyrän kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta.
- b) Kaksi kolmiota ovat yhteneviä, jos kolmion kaksi sivua ja niiden välinen kulma ovat yhtä suuret kuin vastinosat toisessa kolmiossa.
- c) Kaksi kolmiota ovat yhteneviä, jos kolmion yksi kulma ja sen vastainen sivu ovat yhtä suuret kuin vastinosat toisessa kolmiossa.
- d) Kahden yhdenmuotoisen kuvion a ja b pinta-alojen suhde on $2ab$.
- e) Kahden yhdenmuotoisen kappaleen tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.
- f) Kolmion kulmien puolittajat leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka on kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste.
- g) Pisteestä $A(1, -3)$ pisteeseen $B(-2, 2)$ piirretty vektori on $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.
- h) Vektorin $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ pituus on $\sqrt{34}$.

Vihje:

- * Geometria
- * Kehäkulma
- * Esimerkki 2 synteettisestä geometriasta
- * Kolmioiden yhtenevyys
- * Yhtenevyslauseet I
- * Yhtenevyslauseet II
- * Kulmanpuolittajat ja keskijanat

Vastaus:

- a) tosi
- b) tosi
- c) epätosi
- d) epätosi
- e) tosi
- f) tosi

g) epätosi

h) tosi

Ratkaisu:

a) Tosi.

b) Tosi.

c) Epätosi. Kaksi kolmiota ovat yhteneviä, jos kolmion kaksi kulmaa ja toisen vastainen sivu ovat yhtä suuret kuin vastinosat toisessa kolmiossa.

d) Epätosi. Kahden yhdenmuotoisen kuvion pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

e) Tosi.

f) Tosi.

g) Epätosi. Pisteestä A pisteeseen B piirretty vektori on $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$.

h) Tosi.

2.

a) Mikä on sen suoran yhtälö, joka on suoran $2x + 3y - 1 = 0$ suuntainen ja kulkee pisteen $(-4, 5)$ kautta?

b) Määritä pisteiden $(1, 4)$ ja $(-2, -1)$ kautta kulkevan suoran yhtälö. Määritä edelleen sen kolmion ala, jonka suora muodostaa koordinaattiakselin kanssa.

c) Suora kulkee pisteen $(-2, 3)$ kautta ja on kohtisuorassa suoraa $2x - 3y + 2003 = 0$ vastaan. Määritä suoran yhtälö.

Vastaus:

a) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$

b) $y = \frac{5}{3}x + \frac{7}{3}, A = 1\frac{19}{30}$

c) $y = -\frac{3}{2}x$

Ratkaisu:

a) Suoran $2x + 3y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ kulmakerroin $k = -\frac{2}{3}$. Sijoittamalla kulmakerroin ja annettu piste $(-4, 5)$ kaavaan $y - y_0 = k(x - x_0)$ saadaan suoran yhtälö $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$.

b) Suoran kulmakerroin $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5}{3}$. Sijoittamalla piste ja kulmakerroin kaavaan $y - y_0 = k(x - x_0)$ saadaan $y = \frac{5}{3}x + \frac{7}{3}$. Suora leikkaa y -akselin kohdassa $y = \frac{7}{3}$ ja x -akselin kohdassa $\frac{5}{3}x + \frac{7}{3} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{5}$. Tällöin kolmion ala $A = \frac{\frac{7}{3} \cdot \frac{7}{5}}{2} = 1\frac{19}{30}$.

- c) Suoran $2x - 3y + 2003 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{2003}{3}$ kulmakerroin $k = \frac{2}{3}$. Silloin kohtisuorassa olevan suoran kulmakerroin $k = -\frac{3}{2}$. Suoran yhtälö saadaan sijoittamalla piste ja kulmakerroin kaavaan $y - y_0 = k(x - x_0)$. Saadaan $y = -\frac{3}{2}x$.

3. Taskykylkisen kolmion kantasivun päätepisteet ovat $A(1, -2)$ ja $B(7, -1)$. Määritä kolmion huipun koodinaatit, kun huippu on y -akselilla.

Vihje:

- * Tasakylkinen, tasasivuinen, suorakulmainen kolmio
- * Kahden pisteen etäisyys

Vastaus: $(0; 22, 5)$

Ratkaisu: Tasakylkisen kolmion kyljet ovat samanpituiset

$$\Rightarrow AC = BC$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(-1)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(-7)^2 + (y+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow y = 22, 5$$

$\Rightarrow$ Koska kolmion huippu on y -akselilla, kolmion huipun koordinaatit ovat $(0; 22, 5)$.

4. Määritä luku x , kun pisteiden $(3, -2)$ ja $(x, x+2)$ välinen etäisyys on 7.

Vastaus: $x = \frac{-1 \pm 7}{2}$

Ratkaisu: Kahden pisteen etäisyyden kaavan nojalla saadaan yhtälö

$$\sqrt{(x-3)^2 + ((x+2)+2)^2} = 7.$$

Toinen potenssi on luvallinen yhtälön sievennystoimenpide silloin, kun yhtälön molemmat puolet ovat samanmerkkiset. Korotetaan yhtälön molemmat puolet toiseen potenssiin.

$$(x-3)^2 + (x+4)^2 = 49$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 7}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 3, x_2 = -4$$

5. Määritä ne käyrän $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$ pisteet, joihin piirretyt käyrän tangentit leikkaavat x -akselin 45° kulmassa. (YO kevät 1995 tehtävä 5a)

Vihje:

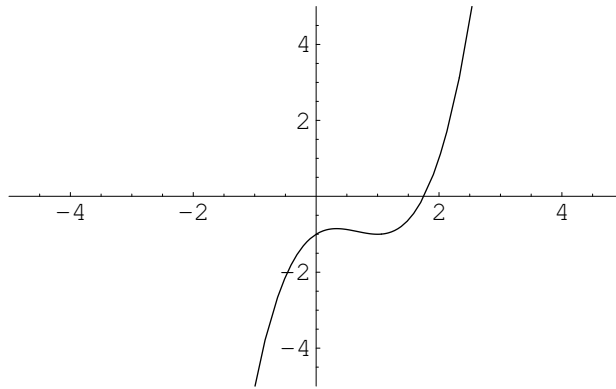
- * Suoran kulmakerroin

Vastaus: $(0, -1)$ ja $(\frac{4}{3}, -\frac{23}{27})$

Ratkaisu: Merkitään $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ ja derivoidaan funktio f : $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$. Koska funktion derivaatta kuvaa käyrän tangentin kulmakeroa, merkitään

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 1 \\
 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 &= 1 \\
 \Leftrightarrow x(3x - 4) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x = 0 \text{ tai } x &= \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $x = 0$ ja $x = \frac{4}{3}$ funktion f lausekkeeseen. Saadaan $f(0) = -1$ tai $f(\frac{4}{3}) = -\frac{23}{27}$. Koska tangentin kulmakerroin on yksi silloin, kun se on 45 asteen kulmassa, käyrän tangentit leikkaavat x -akselin 45° kulmassa pisteissä $(0, -1)$ ja $(\frac{4}{3}, -\frac{23}{27})$.



6. Kolmion kärjet ovat pisteissä $(0,0,0)$, $(\frac{1}{2}, 1, 0)$ ja $(0, 1, 1)$. Piirrä kuva kolmiosta xyz -koordinaatistoon. Kuinka suuri on kolmion pinta-ala? (YO kevät 1995, tehtävä 6)

Vihje:

* Suorakulmainen koordinaatisto avaruudessa

Vastaus: $A = \frac{\sqrt{6}}{4} \approx 0,61$

Ratkaisu: Merkitään $O = (0, 0, 0)$, $A = (\frac{1}{2}, 1, 0)$ ja $B = (0, 1, 1)$.

Kolmion sivujen pituudet ovat

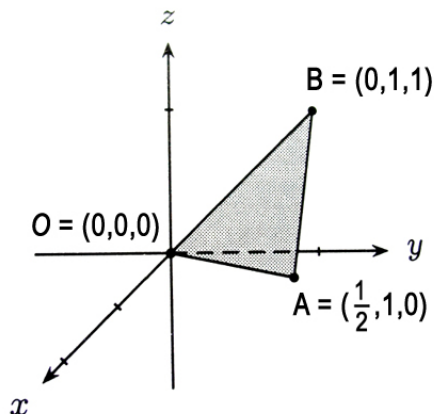
$$OA = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 0} = \frac{\sqrt{5}}{2}, OB = \sqrt{0 + 1 + 1} = \sqrt{2} \text{ ja } AB = \sqrt{\frac{1}{4} + 0 + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Kolmio on tasakylkinen, koska $OA = AB$. Kolmion korkeus saadaan Pythagoraan lauseen avulla

$$h = \sqrt{(OA)^2 - (\frac{1}{2}OB)^2} = \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Näin kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} \approx 0,61.$$



7. Määritä suorien $4x - 2y + 1 = 0$ ja $x - 2y + 3 = 0$ muodostamien kulmien puolittajien yhtälöt.

Vihje:

* Pisteen (x_0, y_0) etäisyys suorasta $ax + by + c = 0$ saadaan kaavalla $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

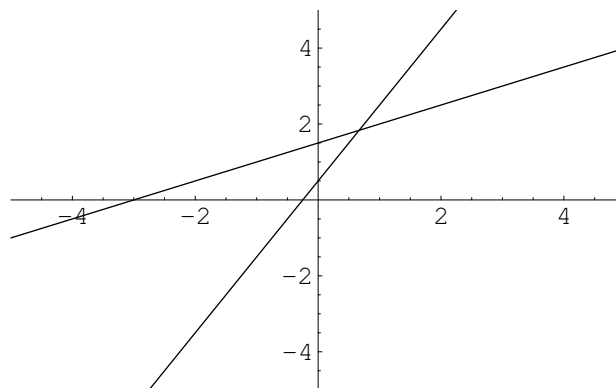
Vastaus: $y = -x + 2\frac{1}{2}$ ja $y = x + 1\frac{1}{6}$

Ratkaisu: Valitaan yleinen piste (x, y) . Kulman puolittajan suoran etäisyys molemmista suorista on sama. Pisteen etäisyys suorasta saadaan kaavalla

$$\begin{aligned} d_1 &= d_2 \\ \Leftrightarrow \frac{|4x - 2y + 1|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}} &= \frac{|x - 2y + 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} \\ \Leftrightarrow |4x - 2y + 1| &= 2|x - 2y + 3| \end{aligned}$$

Ratkaisemalla itseisarvoyhtälö edelleen saadaan

$$\begin{aligned} 4x - 2y + 1 &= 2(x - 2y + 3) \wedge 4x - 2y + 1 = 2(-x + 2y - 3) \\ \Leftrightarrow y &= -x + 2\frac{1}{2} \wedge y = x + 1\frac{1}{6}. \end{aligned}$$



8. Mikä on sen suoran yhtälö, joka kulkee pisteen $(-1, 2)$ kautta ja on etäisyydellä $\sqrt{2}$ pisteestä $(3, 0)$?

Vastaus: $y = -\frac{1}{7}x + 1\frac{6}{7}$ ja $y = -x + 1$

Ratkaisu: Merkitään pisteen $(-1, 2)$ kautta kulkevan suoran yhtälöä yleisessä muodossa $y = kx + k + 2$.

Kaavan $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ avulla saadaan yhtälö

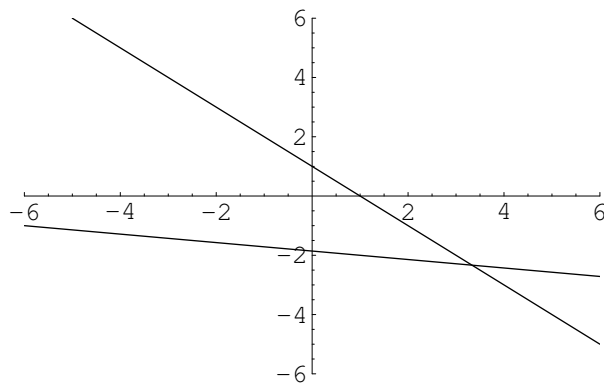
$$\begin{aligned} \frac{|3k - 0 + k + 2|}{\sqrt{k^2 + 1}} &= \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow |4k + 2| &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{k^2 + 1}. \end{aligned}$$

Korottamalla yhtälö toiseen potenssiin saadaan

$$(4k + 2)^2 = 2(k^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-16 \pm 12}{28}.$$

Saadaan yhtälöt $y = -\frac{1}{7}x + 1\frac{6}{7}$ ja $y = -x + 1$.



9. Pisteen $(2, 4)$ kautta kulkeva suora rajoittaa koordinaattiakselin kanssa kolmion, jonka ala on 2. Määritä suoran yhtälöt.

Vastaus: $y = 4x - 4$ ja $y = x + 2$

Ratkaisu: Pisteen $(2, 4)$ kautta kulkevan suoran yhtälö on yleisessä muodossa $y = kx - 2k + 4$. Suora leikkaa x -akselin kohdassa $kx - 2k + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2k-4}{k}$ ja y -akselin kohdassa $y = -2k + 4 = 4 - 2k$.

Saadaan yhtälö

$$\frac{\left| \frac{2k-4}{k} \right| \cdot |4-2k|}{2} = 2$$

$$\Leftrightarrow |2k-4| \cdot |2k-4| = 4|k|$$

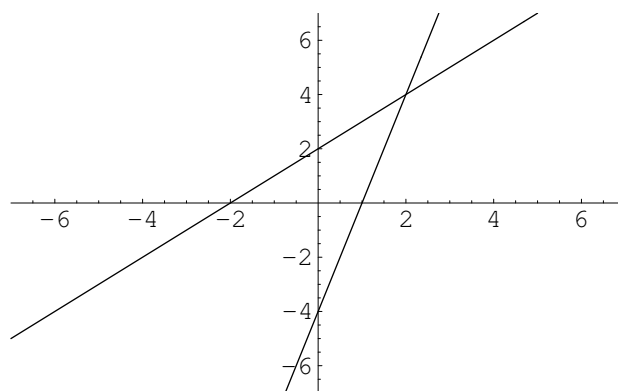
$$\Leftrightarrow (2k-4)^2 = 4|k|$$

Itseisarvon takia yhtälö jakautuu kahteen yhtälöön:

$$(2k-4)^2 = 4k \wedge (2k-4)^2 = -4k$$

$$\Leftrightarrow k_1 = 4 \wedge k_2 = 1 \wedge k_3 = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2}.$$

Ratkaisu k_3 saa imaginäärisiä arvoja. Sijoitetaan k_1 ja k_2 suoran yhtälöön. Saadaan suorat $y_1 = 4x - 4$ ja $y_2 = x + 2$.



10. Millä vakion t arvoilla vektoreille $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3t\mathbf{j}$ ja $\mathbf{b} = t^2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ pätee, että

a) $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ ovat yhdensuuntaiset

b) vektoreiden **a** ja **b** summa ja erotus ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Vihje:

* Vektorikäsite

Vastaus:

a) $t = \sqrt[3]{-\frac{4}{3}} \approx -1,101$

b) $t_1 = \sqrt{\frac{9+\sqrt{21}}{2}} \approx 2,606$ ja $t_2 = \sqrt{\frac{9-\sqrt{21}}{2}} \approx 2,209$

Ratkaisu:

a) Vektorit **a** = $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ja **b** = $p\mathbf{i} + q\mathbf{j}$ ovat yhdensuuntaiset, kun $x \cdot q - y \cdot p = 0$.

$$\Rightarrow 4 + 3t^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \sqrt[3]{-\frac{4}{3}} \approx -1,101$$

b) Summavektori on **a** + **b** = $(1+t^2)\mathbf{i} + (3t+4)\mathbf{j}$ ja erotusvektori **a** - **b** = $(1+t^2)\mathbf{i} + (3t-4)\mathbf{j}$.
Kohtisuoruus saadaan pistetulon avulla

$$(1+t^2)(1-t^2) + (3t+4)(3t-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow t^4 - 9t^2 + 15 = 0.$$

Saadaan bikvadraattinen yhtälö. Merkitään $t^2 = u$. Saadaan

$$u^2 - 9u + 15 = 0$$

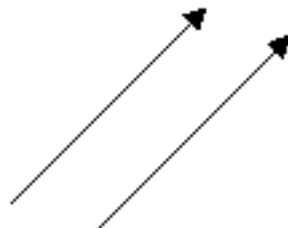
$$\Leftrightarrow u = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{9 \pm \sqrt{21}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{9+\sqrt{21}}{2}} \approx 2,606 \text{ ja } t_2 = \sqrt{\frac{9-\sqrt{21}}{2}} \approx 2,209.$$

11. Mitkä kuvien

1)



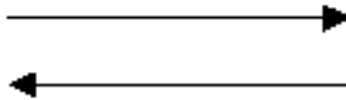
2)



3)



4)



vektoreista ovat

- a) samansuuntaiset
- b) vastakkaissuuntaiset
- c) erisuuntaiset
- d) yhdensuuntaiset

Vastaus:

- a) Kuvan 1 ja 3 vektorit ovat samansuuntaiset.
- b) Kuvan 4 vektorit ovat vastakkaissuuntaiset.
- c) Kuvan 2 vektorit ovat erisuuntaiset.
- d) Kuvan 1, 3 ja 4 vektorit ovat yhdensuuntaisia.

Ratkaisu:

- a) Kuvan 1 ja 3 vektorit ovat samansuuntaiset. Kuvien vektoreilla on sama suunta.

- b) Kuvan 4 vektorit ovat vastakkaissuuntaiset. Kuvien vektoreiden suunta on vastakkainen.
- c) Kuvan 2 vektorit ovat erisuuntaiset. Kuvien vektoreiden suunta on eri.
- d) Kuvan 1, 3 ja 4 vektorit ovat yhdensuuntaisia. Kuvien vektoreiden suunta on joko sama tai vastakkainen. Näin siis yhdensuuntaisten vektoreiden joukko on samansuuntaisten ja vastakkaissuuntaisten vektoreiden joukkojen unioni.

12. Laske vektoreiden $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ja $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ välinen kulma.

Vihje:

* Vektorien välinen kulma $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$, kun $0^\circ \leq \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq 180^\circ$.

Vastaus: 45°

Ratkaisu: Lasketaan pistetulo $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 5$.

Vektorin $\mathbf{a}$ pituus $|\mathbf{a}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ ja vektorin $\mathbf{b}$ pituus $|\mathbf{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$.

Vektoreiden välinen kulma on $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} \approx 0,70710 \Leftrightarrow \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 45^\circ$.

13.

- a) Jaa vektori $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ vektoreiden $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ ja $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ suuntaisiin komponentteihin.
- b) Tutki, ovatko pisteet $P(2, 0, 2)$, $Q(3, -2, 1)$, $R(3, -1, -1)$ ja $S(4, 3, -2)$ samassa tasossa.

Vihje:

* Vektoritulo

* Vektoritulon laskeminen

Vastaus:

- a) $3\mathbf{i} + 8\mathbf{j} = 2(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) - (\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$
- b) Pisteet eivät ole samassa tasossa.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } 3\mathbf{i} + 8\mathbf{j} &= x(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) + y(\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) \\
 &= 2x\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + y\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} \\
 &= (2x + y)\mathbf{i} + (3x - 2y)\mathbf{j} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \\
 &\Rightarrow 3\mathbf{i} + 8\mathbf{j} = 2(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) - (\mathbf{i} - 2\mathbf{j})
 \end{aligned}$$

- b) Muodostetaan vektorit pisteistä P pisteisiin S , R ja Q . Tutkitaan, voidaanko esimerkiksi vektori $\mathbf{a}$ lausua vektoreiden $\mathbf{b}$:n ja $\mathbf{c}$:n avulla.

$$\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k} = x(\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}) + y(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) = (x + 2y)\mathbf{i} + (-x + 3y)\mathbf{j} + (-3x - 4y)\mathbf{k}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ -x + 3y = -2 \\ -3x - 4y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{5} \\ x = 1\frac{2}{5} \end{cases}$$

Tutkitaan, toteuttavatko saadut x :n ja y :n arvot esimerkiksi vektorin $\mathbf{c}$:

$$-3 \cdot 1\frac{2}{5} - 4 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -1 \Leftrightarrow -21 = -9. \text{ Yhtälö on epätosi, joten pisteet eivät ole samassa tasossa.}$$

- 14.** (*) Laske pisteen $P(3, -1, 0)$ etäisyys pisteiden $A(-3, -2, 1)$ ja $B(5, 4, -3)$ kautta kulkevasta suorasta.

Vihje:

* Tasokuviot

Vastaus: 3

Ratkaisu: Lasketaan vektorit $\mathbf{AP} = \mathbf{a} = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ ja $\mathbf{AB} = 8\mathbf{i}6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

Lasketaan $|\mathbf{a}_b| = y = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|} = \frac{58}{\sqrt{116}}$.

Vektorin $\mathbf{a}$ pituus on $\sqrt{38}$ ja Pythagoraan lauseen avulla $x = \pm 3$. Täten pisteen P etäisyys suorasta on 3.

- 15.** Olkoon $A(1, 0, 2)$, $B(-1, -4, 2)$ ja $C(2, 4, 1)$.

- a) Määritä jokin vektori, joka on kohtisuorassa tasoa ABC vastaan.
b) Määritä kolmion ABC ala.

Vastaus:

- a) $4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$
b) 3

Ratkaisu:

- a) Vektoritulon avulla $\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (4 + 0)\mathbf{i} + (0 - 2)\mathbf{j} + (-8 + 4)\mathbf{k} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.
b) Edelleen vektoritulon avulla saadaan $A = \frac{|\mathbf{n}|}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

16. Tutki, ovatko vektorit $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ja $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ yhdensuuntaisia.

Vastaus: Vektorit ovat yhdensuuntaisia.

Ratkaisu: Vektorit ovat yhdensuuntaisia, koska vektoritulo

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (4 - 4)\mathbf{i} + (-2 + 2)\mathbf{j} + (4 - 4)\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

17. (*) Suoran pyramidin pohja on neliö ja sivutahkot muodostavat pohjan kanssa 40° kulman. Kuinka suuri on sivutahkojen välinen kulma (asteissa)? (YO syksy 1995 tehtävä 8a)

Vihje:

* Kartio

Vastaus: $125,9^\circ$

Ratkaisu: Koska yhdenmuotoisissa pyramideissa vastinkulmat ovat yhtäsuuret, voidaan olettaa, että pyramidin pohjaneliön sivu on 2.

Sivutahkona olevan tasakylkisen kolmion huipusta piirretty korkeusjana on trigonometristen funktioiden avulla $\frac{1}{\cos(40^\circ)}$. Tällöin pyramidin sivusärmä s saadaan yhtälöstä $s^2 = 1 + \frac{1}{(\cos(40^\circ))^2}$.

Jos pyramidin pohjaneliön kahdesta vastakkaisesta kärjestä piirretään normaali välissäolevalle pyramidin sivusärmälle, on normaalien välinen kulma α sama kuin haettu sivutahkojen välinen kulma.

Mainittujen normaalien pituudelle n saadaan yhdenmuotoisista kolmioista ACH ja ABN yhtälö

$$\frac{1}{s} = \frac{\sqrt{4-n^2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4 - n^2 = \frac{4}{s^2} \text{ ja } n^2 = 4\left(1 - \frac{1}{s^2}\right).$$

Tämän jälkeen saadaan kosinilauseen avulla lausekkeelle $\cos \alpha$ yhtälö

$$(2\sqrt{2})^2 = 2n^2 - 2n^2 \cos(\alpha)$$

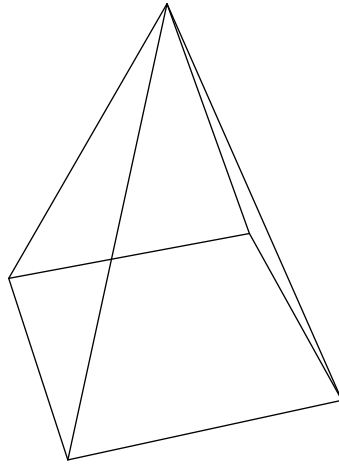
$$\cos(\alpha) = \frac{n^2 - 4}{n^2}$$

$$= -\frac{4}{s^2} \cdot \frac{1}{4\left(1 - \frac{1}{s^2}\right)}$$

$$= -\frac{1}{s^2 - 1}$$

$$= -(\cos 40^\circ)^2$$

$$\Rightarrow \alpha \approx 125,9^\circ.$$



18. (*) Suoran ympyräkartion pohjan säde on R ja korkeus $H = 3R$. Kartion sisään on asetettu ympyrälieriö, jonka akseli on kartion akselin osa. Määritä lieriön pohjan säde x siten, että lieriön vaipan ja pohjien alojen summa on mahdollisimman suuri. (YO kevät 1982, tehtävä 7a)

Vihje:

* Lieriö

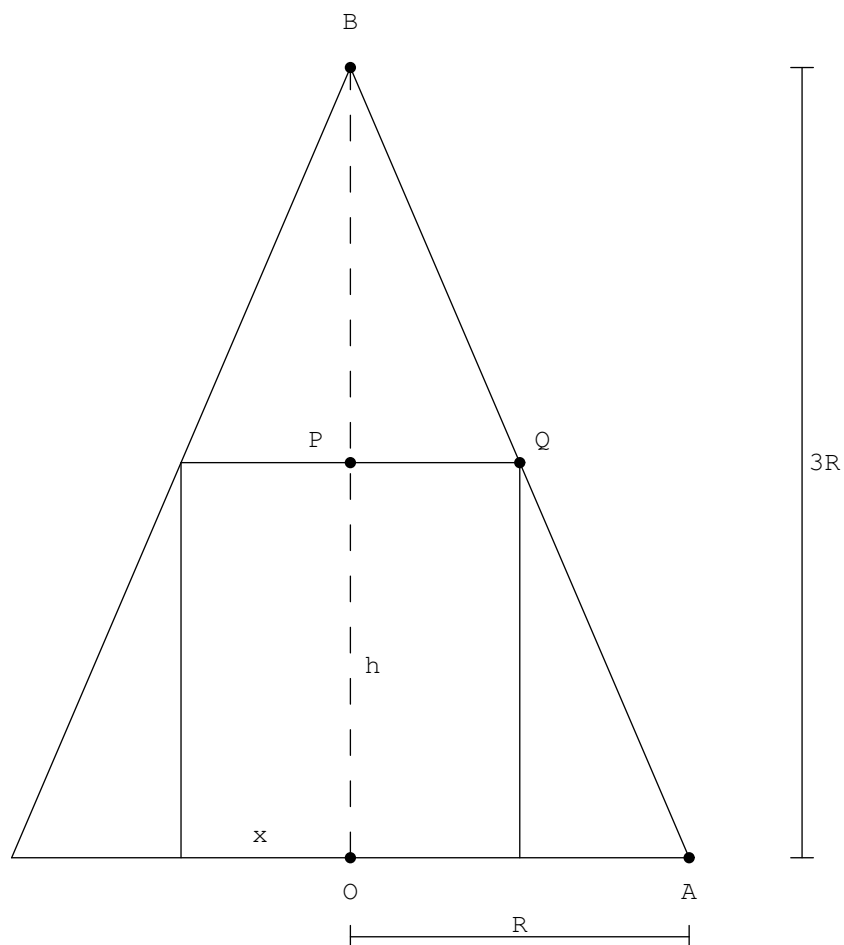
Vastaus: $\frac{9}{4}\pi R^2$

Ratkaisu: Kolmioiden OAB ja PQB yhdenmuotoisuuden nojalla saadaan

$$\frac{3R-h}{3R} = \frac{x}{R} \Leftrightarrow h = 3(R-x).$$

Merkitään $A(x) = 2\pi xh + 2\pi x^2 = 2\pi x(h+x) = 2\pi x(3(R-x)+x) = 2\pi x(3R-2x)$, kun $x \in [0, R]$. Etsitään derivaatan nollakohdat $A'(x) = 2\pi(3R-4x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3R}{4}$.

Koska $A'(x) < 0$ välillä $0 < x < \frac{3R}{4}$ ja $A'(x) > 0$ välillä $\frac{3R}{4} < x < R$, alan funktio $A(x)$ on aidosti vähenevä, kun $0 < x < \frac{3R}{4}$ ja aidosti kasvava, kun $\frac{3R}{4} < x < R$. Ääriarvokohdissa $A(0) = 0$ ja $A(R) = 2\pi R^2$ ja derivaatan nollakohdassa $A(\frac{3R}{4}) = \frac{9}{4}\pi R^2$. Alojen summa on täten suurin, kun lieriön pohjan säde on $\frac{3}{4}R$.



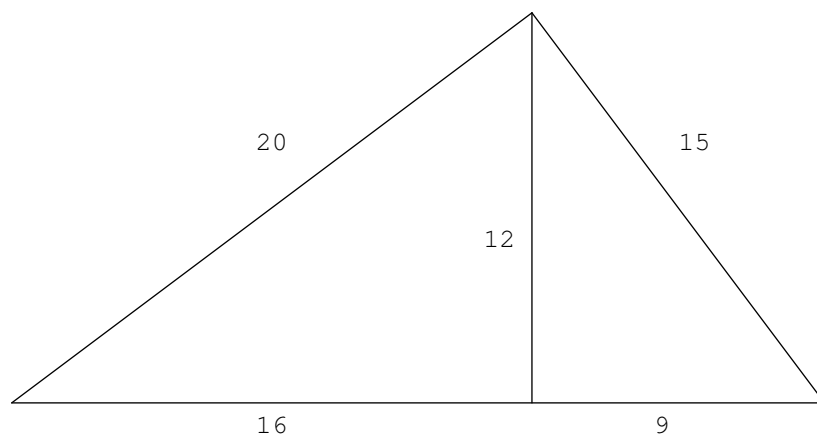
19. (*) Suorakulmainen kolmio, jonka kateetit ovat 15 ja 20 pyörähtää hypotenuusalle piirretyn korkeusjanansa ympäri puoli kierrosta. Laske näin muodostuneen kappaleen pinta-ala.

Vihje:

* Pythagoraan lause

Vastaus: $A = 396\pi + 84$

Ratkaisu:

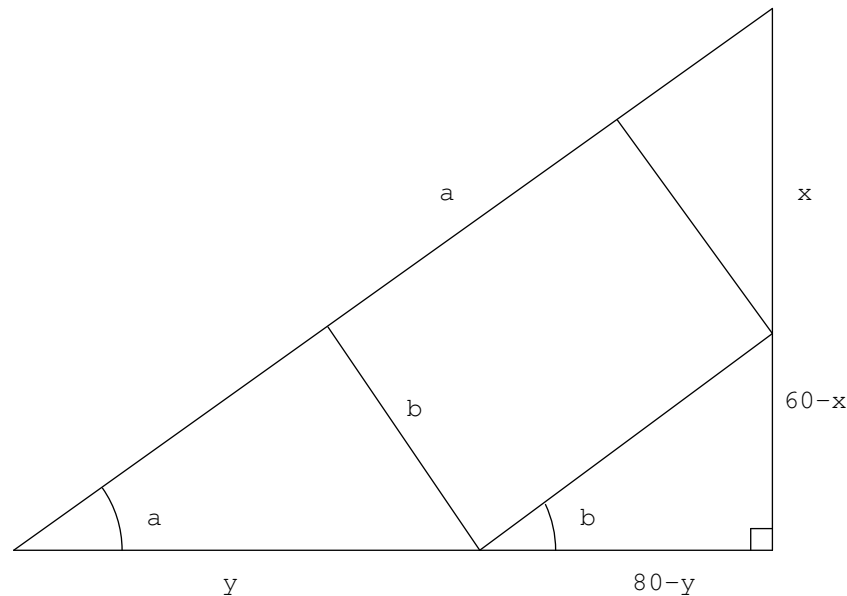


$$\begin{aligned}
A_{tot} &= \frac{1}{2} \cdot ymp + \frac{1}{2} \cdot ymp + \frac{1}{2} \cdot vaippa + \frac{1}{2} \cdot vaippa + 2 \cdot kolmio \\
&= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + 2 \cdot A_5 \\
&= \frac{1}{2} \pi \cdot 9^2 + \frac{1}{2} \pi \cdot 16^2 + \frac{1}{2} \pi \cdot 9 \cdot 15 + \frac{1}{2} \pi \cdot 16 \cdot 20 + 2 \cdot \frac{7 \cdot 12}{2} \\
&= 40,5\pi + 128\pi + 65,5\pi + 160\pi + 2 \cdot 42 \\
&= 396\pi + 84
\end{aligned}$$

20. (*) Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 60 cm ja 80 cm. Kolmion sisällä on suorakulmio, jonka yksi sivu on hypotenuusalla ja kaksi kärkeä kateeteilla. Laske suorakulmion suurin ala.

Vastaus: 16 dm²

Ratkaisu:



Lasketaan kolmion terävät kulmat:

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha) &= \frac{60}{80} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \alpha \approx 36,86989765...^\circ \text{ ja} \\
\beta &= 180^\circ - 90^\circ - \alpha \approx 53,13010235...^\circ.
\end{aligned}$$

Suorakulmaisten kolmioiden avulla saadaan:

$$\sin(\alpha) = \frac{b}{y} \Rightarrow b = 0,6y \text{ ja}$$

$$\cos(\beta) = \frac{80-y}{a} \Rightarrow a = 133\frac{1}{3} - \frac{y}{0,6}.$$

$$\text{Merkitään } A(y) = a \cdot b = 80y - y^2.$$

Lasketaan funktion $A(y)$ derivaatan $A'(y)$ nollakohdat

$$A'(y) = 80 - 2y = 0 \Leftrightarrow y = 40, \text{ kun } 0 < y < 80.$$

Derivaatta saa arvoja

$$A'(0) = 80, A'(40) = 0 \text{ ja } A'(80) = -80.$$

Näin suorakulmion suurin ala $A(40) = 1600 \text{ (cm}^2\text{)}$ saavutetaan, kun $y = 40$.

21. (*) Määritä suoran $y = x$ se piste, jonka etäisyys käyrästä $y = e^x$ on pienin.

Vastaus: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Ratkaisu: Merkitään piste (x, e^x) .

Pisteen (x, e^x) etäisyys suorasta $y = x$ saadaan $d = \frac{|-x+e^x|}{\sqrt{2}}$.

Sievennettynä etäisyys $d_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-x + e^x)$ on positiivinen ja $d_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x - e^x)$ negatiivinen.

Merkitään $g(x) = -x + e^x$.

Funktion g derivaatta $g'(x) = -1 + e^x$. Etsitään derivaatan nollakohdat:

$$e^x = 1$$

$$\Leftrightarrow \ln e^x = \ln 1$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \ln e = \ln 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 1}{\ln e} = 0.$$

Koska derivaatta on negatiivinen, kun $x < 0$ ja positiivinen, kun $x > 0$, on myös funktio $g < 0$, kun $x < 0$ ja $g > 0$, kun $x > 0$. Pienin etäisyys saavutetaan kohdassa $g(0) = 1$, käyrän pisteessä $(0, 1)$. Pisteen $(0, 1)$ etäisyys käyrästä $y = x$ saadaan neliön lävistäjästä: $d = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Käyrän $y = x$ piste on $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

22. (*) Piirrä käyrä $y = \sqrt{|x|}$ sekä määritä pisteen $(1, -2)$ etäisyys käyrästä. (YO syksy 1970 tehtävä 10)

Vastaus: $\sqrt{5}$

Ratkaisu: Olkoon käyrän $y = \sqrt{|x|}$ kyseessä oleva piste $(x, \sqrt{|x|})$. Koska piste ei voi olla imaginäärinen, saadaan pisteeksi edelleen $(x, \sqrt{x})$.

Muodostetaan pisteen $(x, \sqrt{x})$ ja pisteen $(1, -2)$ välille jana: $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 4\sqrt{x} + 5}$, kun $x \geq 0$.

Merkitään $g(x) = x^2 - x + 4\sqrt{x} + 5$, kun $x \geq 0$. Etsitään funktion g derivaatan nollakohdat $g'(x) = 2x - 1 + \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$. Derivaatalla ei ole ratkaisua. Koska $g'(x) > 0$, kun $x > 0$, on myös $f(x) > 0$, kun $x > 0$. Pienin funktion f arvo saavutetaan kohdassa $f(0) = \sqrt{5}$, joka on pisteen $(1, -2)$ etäisyys käyrästä $y = \sqrt{|x|}$.

