

# Geometria ja vektorit

1. Ovatko alla olevat väittämät tosia? Perustele tai anna vastaesimerkki.

- a) Ympyrän kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta.
- b) Kaksi kolmiota ovat yhteneviä, jos kolmion kaksi sivua ja niiden välinen kulma ovat yhtä suuret kuin vastinosat toisessa kolmiossa.
- c) Kaksi kolmiota ovat yhteneviä, jos kolmion yksi kulma ja sen vastainen sivu ovat yhtä suuret kuin vastinosat toisessa kolmiossa.
- d) Kahden yhdenmuotoisen kuvion  $a$  ja  $b$  pinta-alojen suhde on  $2ab$ .
- e) Kahden yhdenmuotoisen kappaleen tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.
- f) Kolmion kulmien puolittajat leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka on kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste.
- g) Pisteestä  $A(1, -3)$  pisteeseen  $B(-2, 2)$  piirretty vektori on  $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ .
- h) Vektorin  $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$  pituus on  $\sqrt{34}$ .

**Vihje:**

- \* Geometria
- \* Kehäkulma
- \* Esimerkki 2 synteettisestä geometriasta
- \* Kolmioiden yhtenevyys
- \* Yhtenevyslauseet I
- \* Yhtenevyslauseet II
- \* Kulmanpuolittajat ja keskijanat

2.

- a) Mikä on sen suoran yhtälö, joka on suoran  $2x + 3y - 1 = 0$  suuntainen ja kulkee pisteen  $(-4, 5)$  kautta?
- b) Määritä pisteiden  $(1, 4)$  ja  $(-2, -1)$  kautta kulkevan suoran yhtälö. Määritä edelleen sen kolmion ala, jonka suora muodostaa koordinaattiakselin kanssa.
- c) Suora kulkee pisteen  $(-2, 3)$  kautta ja on kohtisuorassa suoraa  $2x - 3y + 2003 = 0$  vastaan. Määritä suoran yhtälö.

**3.** Taskykilisen kolmion kantasivun päätepisteet ovat  $A(1, -2)$  ja  $B(7, -1)$ . Määritä kolmion huipun koodinaatit, kun huippu on  $y$ -akselilla.

**Vihje:**

- \* Tasakylkinen, tasasivuinen, suorakulmainen kolmio
- \* Kahden pisteen etäisyys

**4.** Määritä luku  $x$ , kun pisteiden  $(3, -2)$  ja  $(x, x+2)$  välinen etäisyys on 7.

**5.** Määritä ne käyrän  $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$  pisteet, joihin piirretyt käyrän tangentit leikkaavat  $x$ -akselin  $45^\circ$  kulmassa. (YO kevät 1995 tehtävä 5a)

**Vihje:**

- \* Suoran kulmakerroin

**6.** Kolmion kärjet ovat pisteissä  $(0, 0, 0)$ ,  $(\frac{1}{2}, 1, 0)$  ja  $(0, 1, 1)$ . Piirrä kuva kolmiosta  $xyz$ -koordinaatistoon. Kuinka suuri on kolmion pinta-ala? (YO kevät 1995, tehtävä 6)

**Vihje:**

- \* Suorakulmainen koordinaatisto avaruudessa

**7.** Määritä suorien  $4x - 2y + 1 = 0$  ja  $x - 2y + 3 = 0$  muodostamien kulmien puolittajien yhtälöt.

**Vihje:**

- \* Pisteiden  $(x_0, y_0)$  etäisyys suorasta  $ax + by + c = 0$  saadaan kaavalla  $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

**8.** Mikä on sen suoran yhtälö, joka kulkee pisteen  $(-1, 2)$  kautta ja on etäisyydellä  $\sqrt{2}$  pisteestä  $(3, 0)$ ?

**9.** Pisteiden  $(2, 4)$  kautta kulkeva suora rajoittaa koordinaattiakselin kanssa kolmion, jonka ala on 2. Määritä suoran yhtälöt.

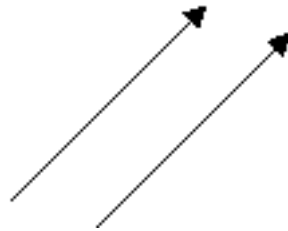
**10.** Millä vakion  $t$  arvoilla vektoreille  $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3t\mathbf{j}$  ja  $\mathbf{b} = t^2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$  pätee, että

- a)  $\mathbf{a}$  ja  $\mathbf{b}$  ovat yhdensuuntaiset
- b) vektoreiden  $\mathbf{a}$  ja  $\mathbf{b}$  summa ja erotus ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

**Vihje:**

# 11. Mitkä kuvien

1)



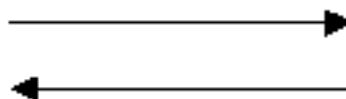
2)



3)



4)



vektoreista ovat

- a) samansuuntaiset
- b) vastakkaissuuntaiset

- c) erisuuntaiset
- d) yhdensuuntaiset

**12.** Laske vektoreiden  $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$  ja  $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$  välinen kulma.

**Vihje:**

\* Vektorien välinen kulma  $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$ , kun  $0^\circ \leq \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq 180^\circ$ .

**13.**

- a) Jaa vektori  $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$  vektoreiden  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$  ja  $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$  suuntaisiin komponentteihin.
- b) Tutki, ovatko pisteet  $P(2, 0, 2)$ ,  $Q(3, -2, 1)$ ,  $R(3, -1, -1)$  ja  $S(4, 3, -2)$  samassa tasossa.

**Vihje:**

- \* Vektoritulo
- \* Vektoritulon laskeminen

**14.** (\*) Laske pisteen  $P(3, -1, 0)$  etäisyys pisteiden  $A(-3, -2, 1)$  ja  $B(5, 4, -3)$  kautta kulkevasta suorasta.

**Vihje:**

- \* Tasokuviot

**15.** Olkoon  $A(1, 0, 2)$ ,  $B(-1, -4, 2)$  ja  $C(2, 4, 1)$ .

- a) Määritä jokin vektori, joka on kohtisuorassa tasoa  $ABC$  vastaan.
- b) Määritä kolmion  $ABC$  ala.

**16.** Tutki, ovatko vektorit  $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$  ja  $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$  yhdensuuntaisia.

**17.** (\*) Suoran pyramidin pohja on neliö ja sivutahkot muodostavat pohjan kanssa  $40^\circ$  kulman. Kuinka suuri on sivutahkojen välinen kulma (asteissa)? (YO syksy 1995 tehtävä 8a)

**Vihje:**

- \* Kartio

**18.** (\*) Suoran ympyräkartion pohjan säde on  $R$  ja korkeus  $H = 3R$ . Kartion sisään on asetettu ympyrälieriö, jonka akseli on kartion akselin osa. Määritä lieriön pohjan säde  $x$  siten, että lieriön vaipan ja pohjien alojen summa on mahdollisimman suuri. (YO kevät 1982, tehtävä 7a)

**Vihje:**

\* Lieriö

**19.** (\*) Suorakulmainen kolmio, jonka kateetit ovat 15 ja 20 pyörähtää hypotenuusalle piirretyn korkeusjanansa ympäri puoli kierrosta. Laske näin muodostuneen kappaleen pinta-ala.

**Vihje:**

\* Pythagoraan lause

**20.** (\*) Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 60 cm ja 80 cm. Kolmion sisällä on suorakulmio, jonka yksi sivu on hypotenuusalla ja kaksi kärkeä kateeteilla. Laske suorakulmion suurin ala.

**21.** (\*) Määritä suoran  $y = x$  se piste, jonka etäisyys käyrästä  $y = e^x$  on pienin.

**22.** (\*) Piirrä käyrä  $y = \sqrt{|x|}$  sekä määritä pisteen  $(1, -2)$  etäisyys käyrästä. (YO syksy 1970 tehtävä 10)