

Funktio

1.

- a) Mikä on funktion $f(x) = x^2 + 1$ lähtöjoukko eli määrittelyjoukko, kun $0 \leq x \leq 5$?
- b) Mikä on funktion $f(x) = x^2 + 1$ maalijoukko eli arvojoukko?
- c) Selitä, mikä on funktion nollakohta. Anna esimerkki.
- d) Mitä tarkoittaa funktion jatkuvuus?

Vihje:

- * Funktiokäsite
- * Funktion jatkuvuus

Vastaus:

- a) $[0, 5]$
- b) $[1, \infty[$
- c) ks. Ratkaisu
- d) ks. Ratkaisu

Ratkaisu:

- a-b) Jos x on joukon A alkio (merkitään $x \in A$) ja y tähän liittyvä joukon B alkio ($y \in B$), merkitään $y = f(x)$ ja sanotaan, että funktio f kuvaa alkion x alkion y tai että y on alkion x kuva funktiossa f . Joukko A on funktion f lähtöjoukko eli määrittelyjoukko. Joukko B taas on funktion f maalijoukko. Funktion lähtöjoukko eli määrittelyjoukko sisältää funktion saavuttamat x -arvot ja funktion $f(x) = x^2 + 1$ lähtöjoukko siis $[0, 5]$. Funktion määrittelyjoukko sisältää funktion saavuttamat y -arvot ja funktion $f(x) = x^2 + 1$ maalijoukko eli arvojoukko siis $[1, \infty[$.
- c) Funktion nollakohta on sellainen funktion kohta, jonka välittömässä ympäristössä arvot muuttuvat joko positiiviseksi negatiiviseksi tai negatiiviseksi positiiviseksi. Tällöin funktion kuvaaja ylittää x -akselin. Esimerkiksi funktion $f(x) = x - 1$ nollakohta on $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
- d) Reaalifunktio f on jatkuva pisteessä a , jos funktion raja-arvo tässä pisteessä on olemassa ja se on yhtä suuri kuin funktion arvo ko. pisteessä. Toisaalta funktio on jatkuva jollakin reaaliakselin välillä, jos se on jatkuva tämän välin jokaisessa pisteessä. Havainnollisesti funktio on jatkuva, jos funktion kuvaaja on yhtenäinen käyrä tällä välillä. Esimerkiksi funktio $f(x) = x^2$ on jatkuva kaikkialla. Myös funktio $f(x) = \sqrt{x}$ on jatkuva määrittelyjoukossaan, kun $x > 0$, mutta kaikkialla $x \in \mathbb{R}$.

2. Ratkaise funktion f nollakohdat ja piirrä kuvaaja.

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x - 5$

c) $f(x) = x^2 - 2$

d) $f(x) = 2x^2 - x + 1$

Vihje:

* Funktion kuvaaja

Vastaus:

a) $x = \frac{1}{2}$

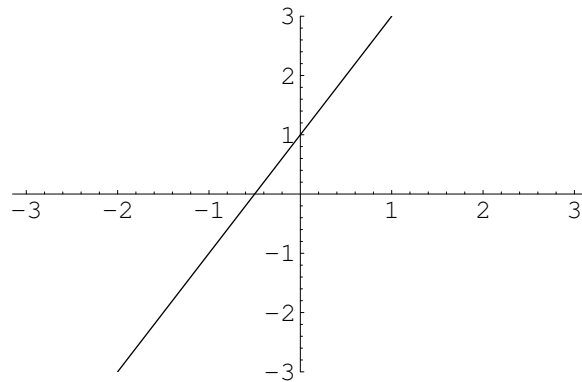
b) $x = 10$

c) $x = \pm\sqrt{2}$

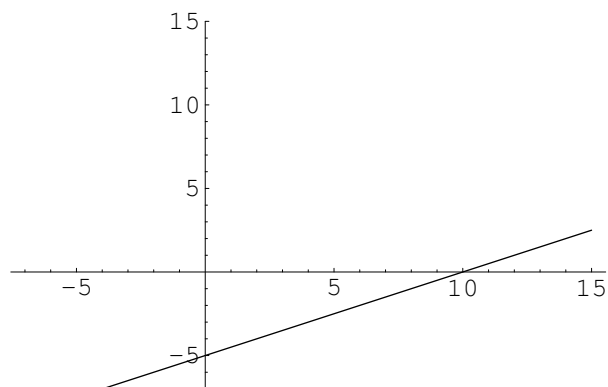
d) ei nollakohtia

Ratkaisu:

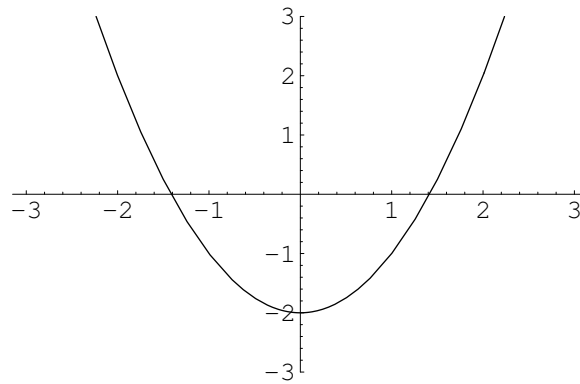
a) Funktion $f(x) = 2x + 1$ nollakohta on $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.



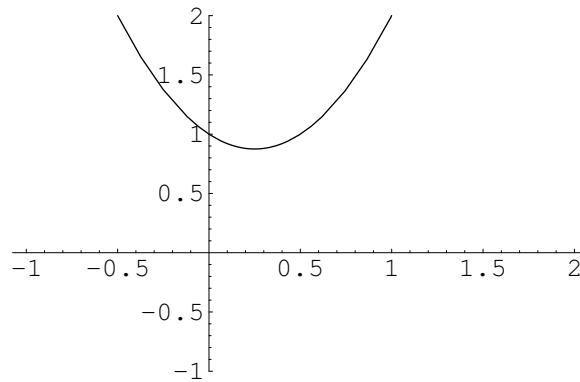
b) Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x - 5$ nollakohta on $\frac{1}{2}x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 10$.



c) Funktion $f(x) = x^2 - 2$ nollakohdat ovat $x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.



d) Funktiolla $f(x) = 2x^2 - x + 1$ ei ole reaalisia nollakohtia, koska toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan diskriminantti $D = -7$ saa imaginäärisiä arvoja.



3. Ratkaise funktion f nollakohdat ja piirrä kuvaaja.

a) $f(a) = 5a^3$

b) $f(a) = 2\frac{3}{4}a^3 + 4$, kun $-2 \leq a \leq 2$

c) $f(a) = a^3 - 3a - 1$, kun $-5 \leq a \leq 1$

d) $f(x) = 4x^4$, kun $f(x) > 1$

Vastaus:

a) $a = 0$

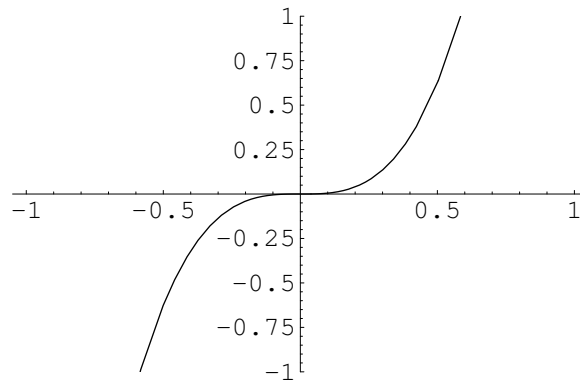
b) $a = \sqrt[3]{-\frac{16}{11}} \approx -1,133$

c) $a_1 \approx -1,53209$ ja $a_2 \approx -0,347296$

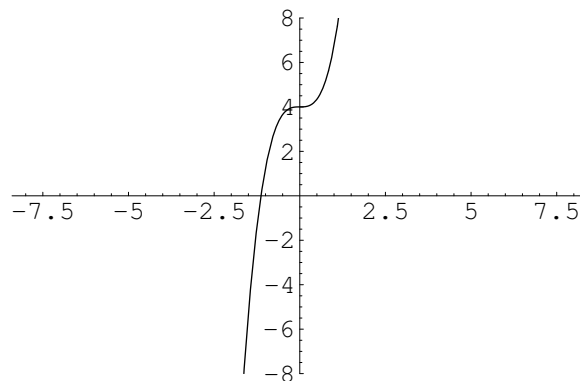
d) ei nollakohtia määrittelyalueella

Ratkaisu:

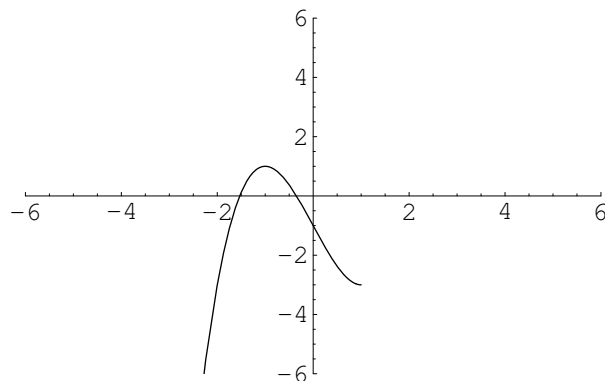
a) Funktion $f(a) = 5a^3$ nollakohta on $5a^3 = 0 \Leftrightarrow a = 0$.



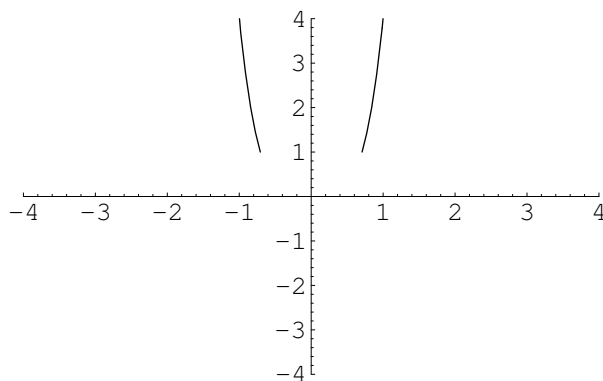
b) Funktion $f(a) = 2\frac{3}{4}a^3 + 4$ nollakohta on $2\frac{3}{4}a^3 + 4 = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{-\frac{16}{11}} \approx -1,133$, kun $-2 \leq a \leq 2$.



c) Funktion $f(a) = a^3 - 3a - 1$ nollakohdat ovat $a^3 - 3a - 1 = 0 \Leftrightarrow a_1 \approx -1,53209$ ja $a_2 \approx -0,347296$, kun $-5 \leq a \leq 1$. Nollakohdat voidaan ratkaista esimerkiksi Mathematica-, Maple- tai Matlab-laskentaohjelman avulla.



- d) Funktion $f(x) = 4x^4$ nollakohta on $4x^4 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, mutta kun $f(x) > 1$ funktiolla ei ole nollakohtia.



4. Ratkaise funktion f nollakohdat ja piirrä kuvaaja.

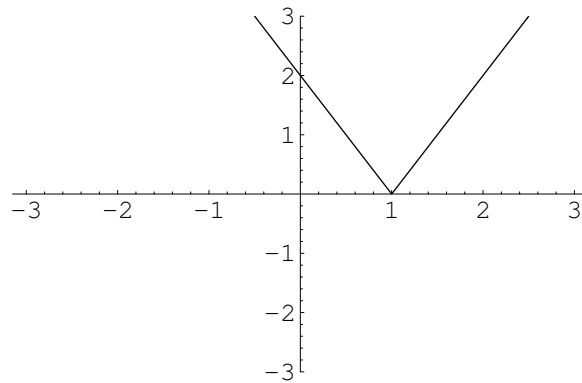
- a) $f(x) = |2x - 2|$
- b) $f(x) = -|2x + 2| + 4$
- c) $f(x) = |x^2 - 2x| - 4$
- d) $f(x) = |x + 2| + |x - 1| - (x + 1)$
- e) $f(x) = |x^3 - 3x^2 + 2| - 5$

Vastaus:

- a) $x = 1$
- b) $x_1 = 1$ ja $x_2 = -3$
- c) $x_1 = 1 - \sqrt{5} \approx -1,236$ ja $x_2 = 1 + \sqrt{5} \approx 3,236$
- d) ei nollakohtia
- e) $x_1 = 1 + \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{135}{2} - \frac{27\sqrt{21}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}(5 + \sqrt{21})} \approx 3,223$ ja
 $x_2 = 1 - \sqrt[3]{\frac{2}{5 - \sqrt{21}}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}(5 - \sqrt{21})} \approx -1,279$

Ratkaisu:

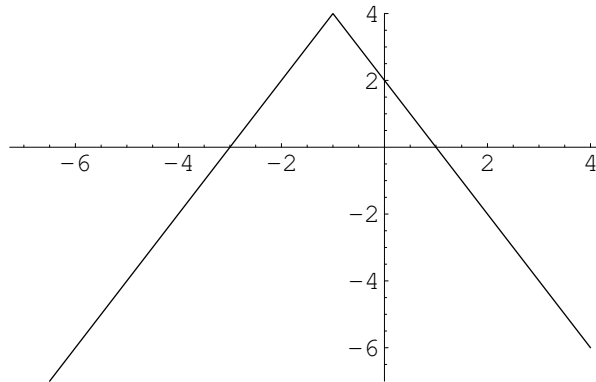
- a) Funktion $f(x) = |2x - 2|$ nollakohta on $x = 1$. Tämä nähdään esimerkiksi kuvasta.



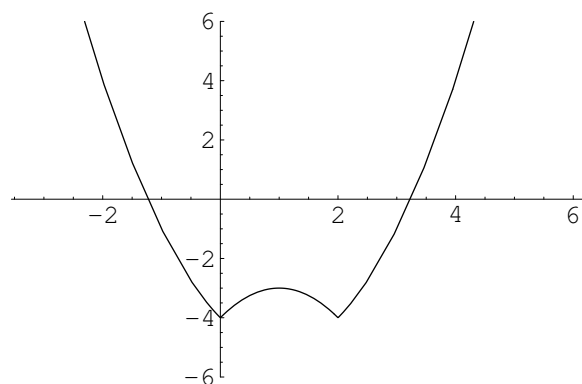
b) Funktion $f(x) = -|2x + 2| + 4$ nollakohdat saadaan yhtälöparin

$$f(x) = \begin{cases} -(2x + 2) + 4 = -2x + 2, & \text{kun } 2x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \\ -(-2x - 2) + 4 = 2x + 6, & \text{kun } 2x + 2 < 0 \Leftrightarrow x < -1 \end{cases}$$

suorien nollakohdista. Nollakohdat ovat $-2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ ja $2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -3$. Nollakohdat nähdään myös kuvaajasta.



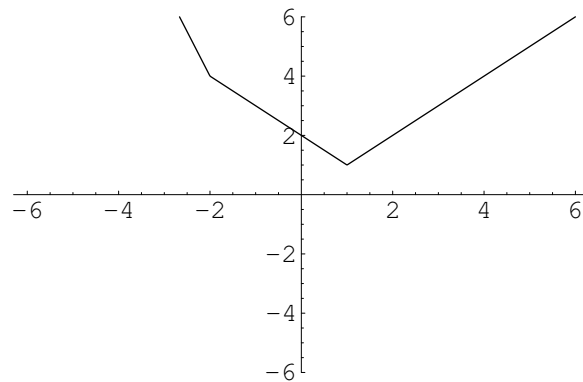
c) Funktion $f(x) = |x^2 - 2x| - 4$ nollakohdat saadaan paraabelin $y = x^2 - 2x - 4$ nollakohdista. Nollakohdat ovat $x_1 = 1 - \sqrt{5} \approx -1,236$ ja $x_2 = 1 + \sqrt{5} \approx 3,236$.



d) Funktiolla $f(x) = |x + 2| + |x - 1| - (x + 1)$ ei ole nollakohtia, koska yhtälöryhmän

$$f(x) = \begin{cases} (-x - 2) - (x - 1) - x - 1 = -3x - 2, & \text{kun } x + 2 < 0 \Leftrightarrow x < -2 \\ (x + 2) + (-x + 1) - x - 1 = -x + 2, & \text{kun } -2 \leq x \leq 1 \\ (x + 2) + (x - 1) - x - 1 = x, & \text{kun } x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \end{cases}$$

yhdelläkään suoralla ei ole nollakohtia kyseisellä välillä. Tämä nähdään myös kuvaajasta.



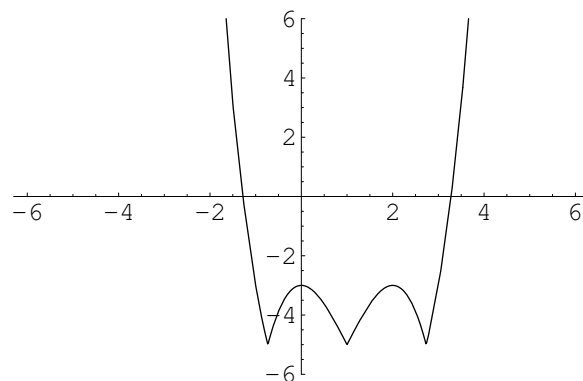
e) Funktion $f(x) = |x^3 - 3x^2 + 2| - 5$ nollakohdat saadaan yhtälöparin

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 - 3 \\ -x^3 + 3x^2 - 7 \end{cases}$$

kuvaajien nollakohdista. Nollakohdat ovat

$$x^3 - 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 + \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{135}{2} - \frac{27\sqrt{21}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}(5 + \sqrt{21})} \approx 3,223 \text{ ja}$$

$$-x^3 + 3x^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 1 - \sqrt[3]{\frac{2}{5 - \sqrt{21}}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}(5 - \sqrt{21})} \approx -1,279$$



5. Ratkaise funktion f nollakohdat ja piirrä kuvaaja.

a) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = \sqrt{-x}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Vihje:

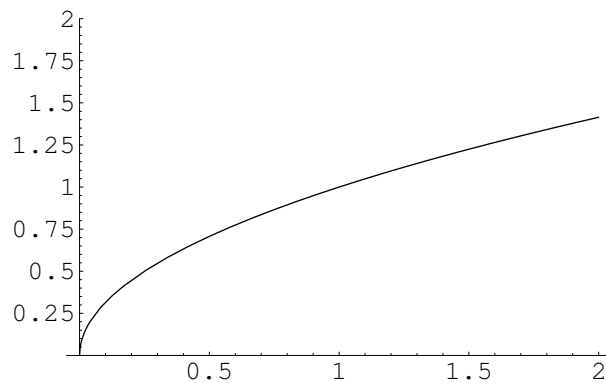
* Juurifunktiot

Vastaus:

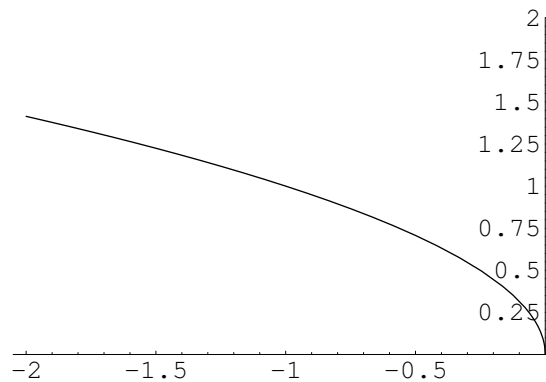
- a) $x = 0$
- b) $x = 0$
- c) $x_1 = -1$ ja $x_2 = 1$
- d) $x = 0$

Ratkaisu:

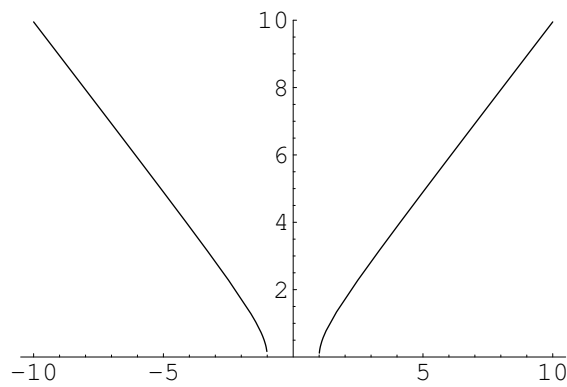
- a) Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ nollakohta on $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.



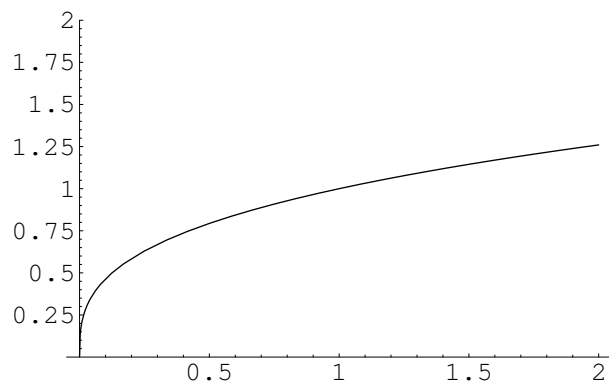
- b) Funktion $f(x) = \sqrt{-x}$ nollakohta on $\sqrt{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.



- c) Funktion $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ nollakohdat ovat $\sqrt{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1$ ja $x_2 = 1$.



d) Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x}$ nollakohta on $\sqrt[3]{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.



6. Piirrä funktion f kuvaaja ja ratkaise nollakohdat.

a) $f(x) = \cos(x) + 2$

b) $f(x) = \tan(x)$

c) $f(x) = \sqrt{(\sin(x))^2}$

d) $f(x) = \sin(x) + x$

e) $f(x) = -|\sin(x)| - \frac{1}{2}x$

Vihje:

* Trigonometrinen funktioiden kuvaajat

Vastaus:

a) ei nollakohtia

b) $x = 0 + n \cdot \pi$, kun $n \in \mathbb{Z}$

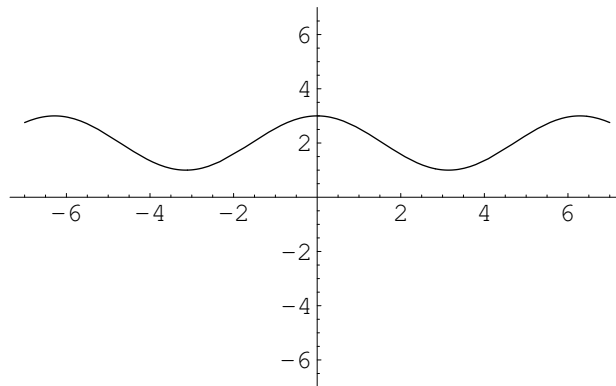
c) $x = 0 + n \cdot \pi$, kun $n \in \mathbb{Z}$

d) $x = 0$

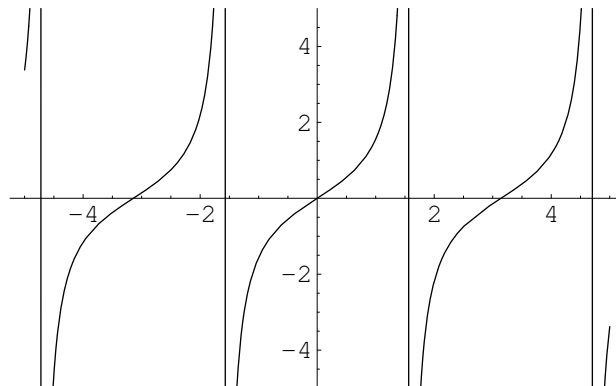
e) $x_1 = -1,895$ $x_2 = 0$

Ratkaisu:

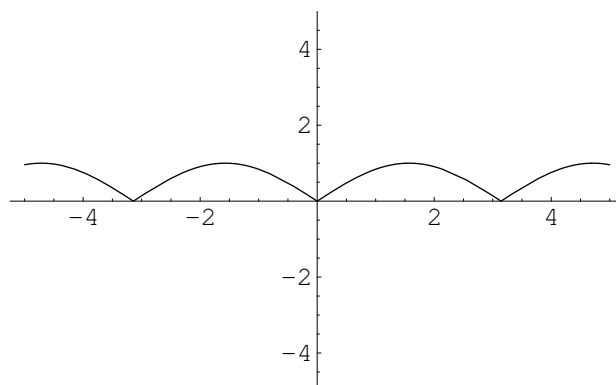
a) Funktiolla $f(x) = \cos(x) + 2$ ei ole nollakohtia. Tämä nähdään kuvaajasta.



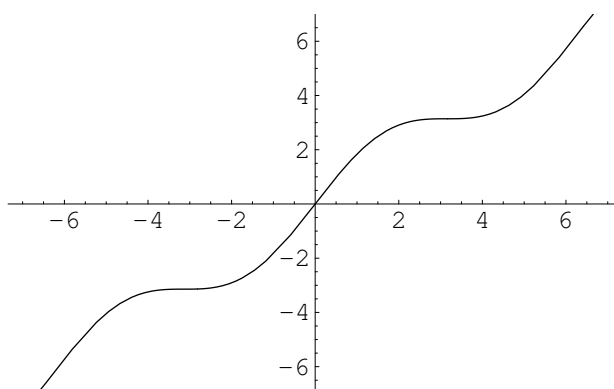
b) Funktion $f(x) = \tan(x)$ nollakohdat ovat $x = 0 + n \cdot \pi$, kun $n \in \mathbb{Z}$.



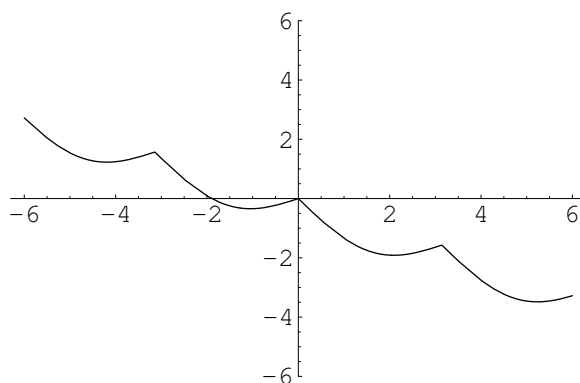
c) Funktion $f(x) = \sqrt{(\sin(x))^2}$ nollakohdat ovat $x = 0 + n \cdot \pi$, kun $n \in \mathbb{Z}$.



d) Funktion $f(x) = \sin(x) + x$ nollakohta on $x = 0$.



e) Funktion $f(x) = -|\sin(x)| - \frac{1}{2}x$ nollakohdat ovat $x_1 = -1,895$ ja $x_2 = 0$. Nollakohta x_1 saadaan esimerkiksi Mathematica-, Maple- tai Matlab-laskentaohjelmalla.



7. Ratkaise funktion f nollakohdat ja piirrä kuvaaja.

a) $f(x) = \ln x$

b) $f(x) = \ln(x-2)$

c) $f(x) = 10^x$

Vastaus:

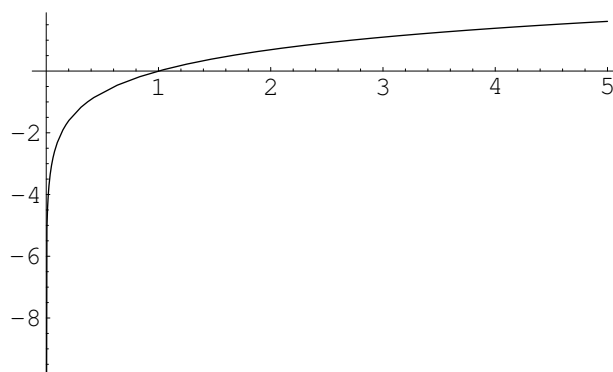
a) $x = 1$

b) $x = 3$

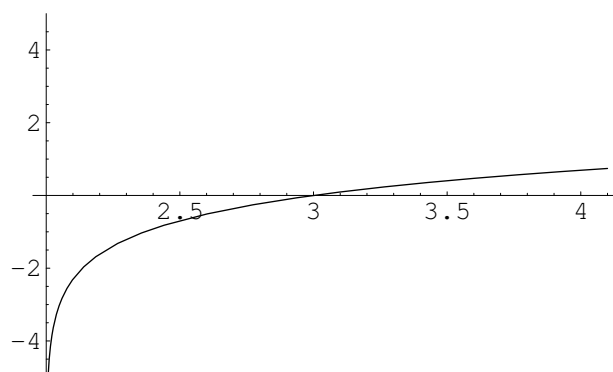
c) ei nollakohtia

Ratkaisu:

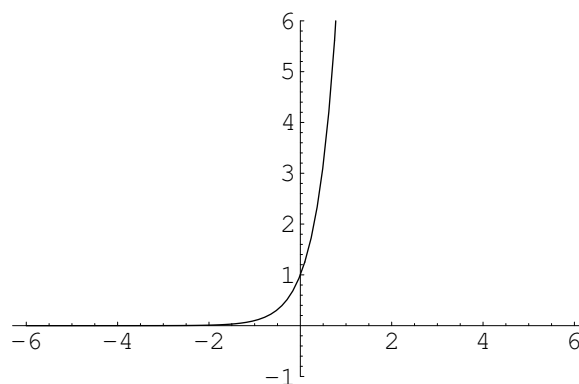
a) Funktion $f(x) = \ln x$ nollakohta on $\ln x = 0 \Leftrightarrow e^0 = x \Leftrightarrow x = 1$.



b) Funktion $f(x) = \ln(x - 2)$ nollakohta on $\ln(x - 2) = 0 \Leftrightarrow e^0 = x - 2 \Leftrightarrow x = 3$.



c) Funktiolla $f(x) = 10^x$ ei ole nollakohtia, koska $10^x = 0$ on mahdoton yhtälö. Funktio $f(x) \rightarrow \infty$, kun $f(x) \rightarrow 0$.



8. Ratkaise funktion nollakohdat ja piirrä kuvaaja.

a) $y = \begin{cases} x + 1, & \text{kun } x < 0 \\ 3x + 1, & \text{kun } x \geq 0 \end{cases}$

$$\text{b) } y = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{kun } x \geq 0 \\ -x^2 + \frac{1}{2}, & \text{kun } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } y = \begin{cases} 2, & \text{kun } x \leq 1 \\ -x, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$$

Vihje: Tarkastele funktiota paloittain.

Vastaus:

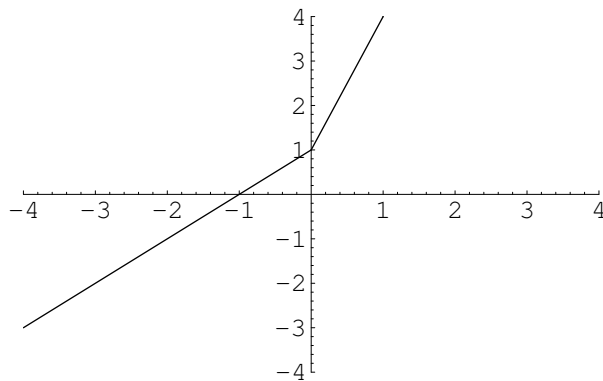
a) $x = -1$

b) $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

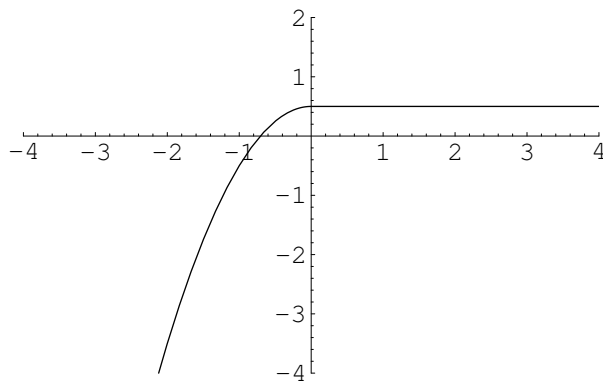
c) ei nollakohtia

Ratkaisu:

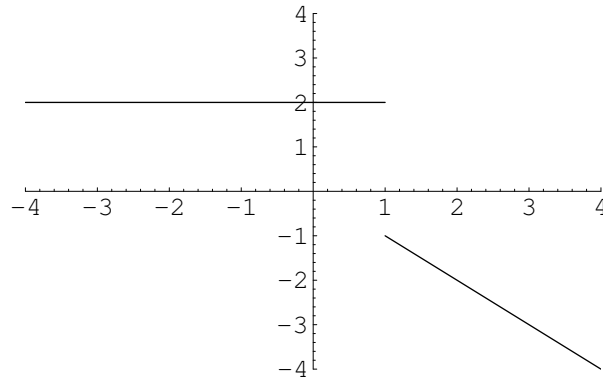
a) Funktion $y = \begin{cases} x + 1, & \text{kun } x < 0 \\ 3x + 1, & \text{kun } x \geq 0 \end{cases}$ nollakohta on $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.



b) Funktion $y = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{kun } x \geq 0 \\ -x^2 + \frac{1}{2}, & \text{kun } x < 0 \end{cases}$ nollakohta on $-x^2 + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



- c) Funktiolla $y = \begin{cases} 2, & \text{kun } x \leq 1 \\ -x, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$ ei ole nollakohtia, koska kumpikaan yhtälöparin suorista ei leikkaa x -akselia kyseisellä välillä.



9. Piirrä funktion kuvaaja. Määritä nollakohdat ja asymptootit.

- a) $y = \frac{2}{x-1}$
- b) $y = \frac{x}{x^2-1}$
- c) $y = \frac{x^2+1}{x}$
- d) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$
- e) $y = \frac{x^3+5x^2-4}{2x^2}$

Vihje:

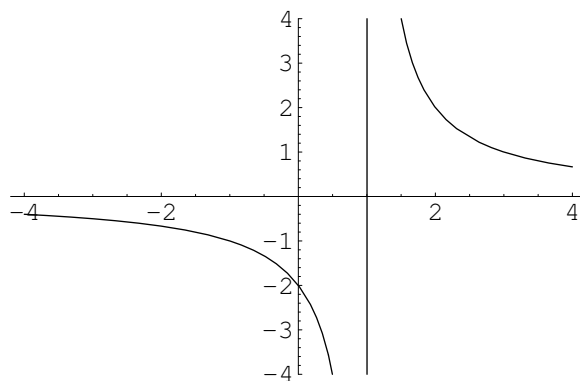
- * Asymptootit
- * Liittohyperbeli ja asymptootit

Vastaus:

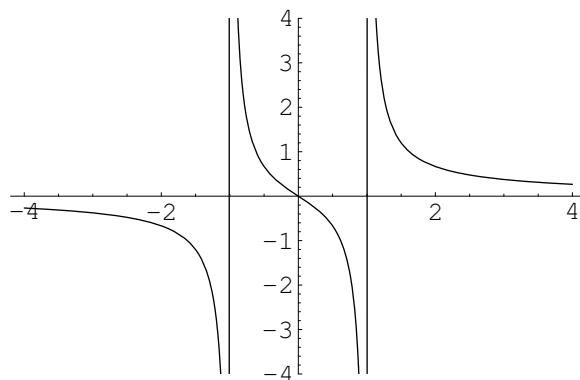
- a) Ei nollakohtia, asymptootit ovat x -akseli ja suora $x = 1$.
- b) Nollakohta $x = 0$, asymptootit ovat x -akseli ja suorat $x = -1$ sekä $x = 1$.
- c) Ei nollakohtia, asymptootit ovat y -akseli ja suora $y = x$.
- d) Nollakohdat $x_1 = -1$ ja $x_2 = 1$, asymptootti on suora $y = 1$.
- e) Nollakohdat $x_1 = -1$, $x_2 = 2(-1 - \sqrt{2}) \approx -4,828$ ja $x_3 = 2(-1 + \sqrt{2}) \approx 0,828$, asymptootit ovat y -akseli sekä suora $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Ratkaisu:

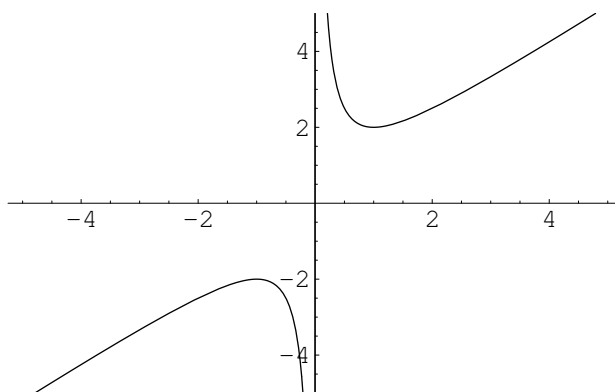
- a) Funktiolla $y = \frac{2}{x-1}$ ei ole nollakohtia. Funktion asymptootit ovat x -akseli ja suora $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Koordinaatistoon on piirretty myös asymptootit.



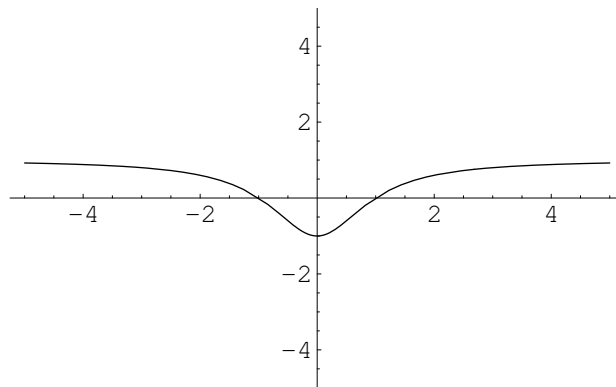
- b) Funktion $y = \frac{x}{x^2-1}$ nollakohta on $x = 0$. Funktion asymptootit ovat x -akseli ja suorat $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \wedge x = 1$. Koordinaatistoon on piirretty myös asymptootit.



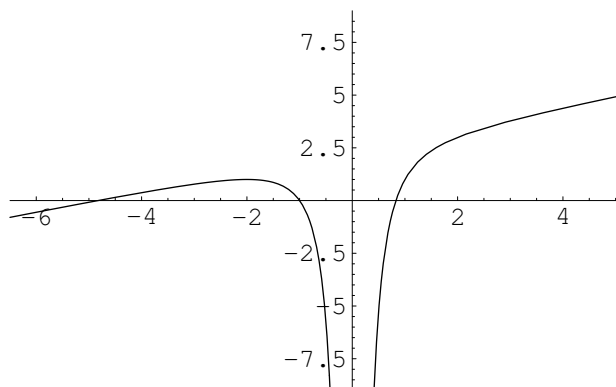
- c) Funktiolla $y = \frac{x^2+1}{x}$ ei ole nollakohtia. Asymptootit ovat y -akseli ja suora $y = x$.



- d) Funktion $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ nollakohdat ovat $x_1 = -1$ ja $x_2 = 1$. Asymptootti on suora $y = 1$.



e) Funktion $y = \frac{x^3+5x^2-4}{2x^2}$ nollakohdat ovat $x_1 = -1$, $x_2 = 2(-1 - \sqrt{2}) \approx -4,828$ ja $x_3 = 2(-1 + \sqrt{2}) \approx 0,828$. Asymptootit ovat y -akseli sekä suora $y = \frac{1}{2}x - 1$.



10. Piirrä kuvaaja. Määritä mahdolliset asymptootit ja kohdat, joissa kuvaaja leikkaa x -akselin.

a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

b) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

c) $4x^2 + 25y^2 = 100$

d) $(x-2)^2 + y^2 = 4$

e) $2x^2 - 3y^2 + 1 = 0$

f) $y = \sqrt{2x^2 - 1}$

Vihje:

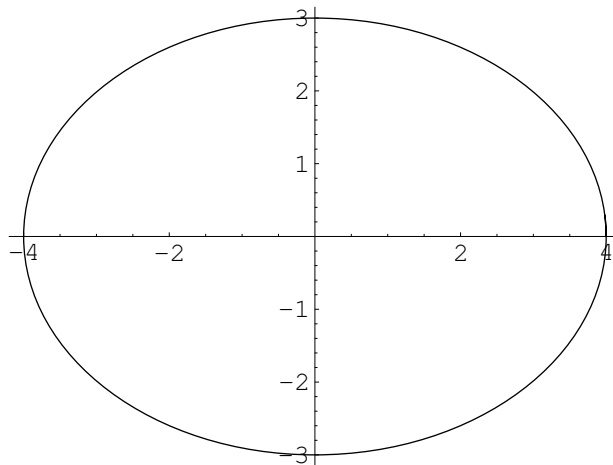
- * Ympyrä ja sen yhtälö
- * Hyperbeli
- * Ellipsi

Vastaus:

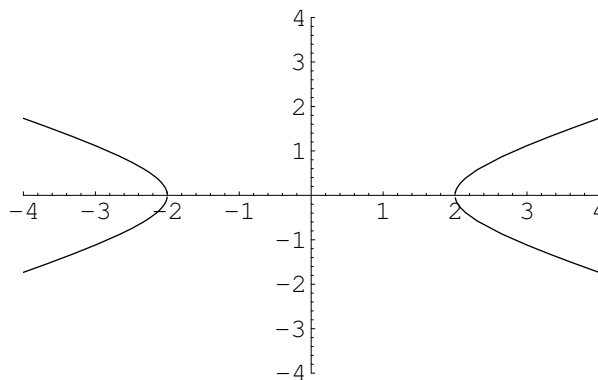
- a) Nollakohdat $x_1 = -4$ ja $x_2 = 4$.
- b) Nollakohdat $x_1 = -2$ ja $x_2 = 2$, asymptootit ovat suorat $y = \pm \frac{1}{2}x$.
- c) Nollakohdat $x_1 = -5$ ja $x_2 = 5$.
- d) Nollakohdat $x_1 = 0$ ja $x_2 = 4$.
- e) Kuvaaja ei leikkaa x -akselia, asymptootit ovat suorat $y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}x$.
- f) Nollakohdat $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ja $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ratkaisu:

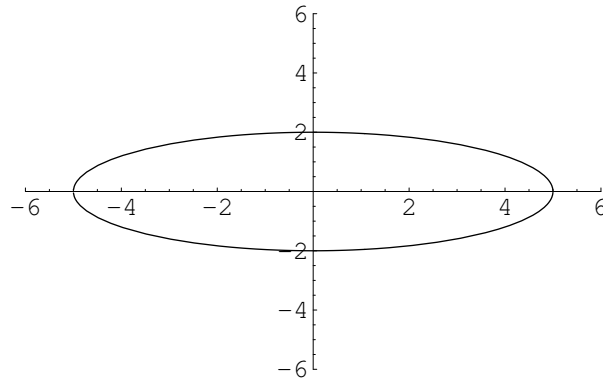
- a) Funktio $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ kuvaa ellipsiä ja se leikkaa x -akselin kohdissa $x_1 = -4$ ja $x_2 = 4$.



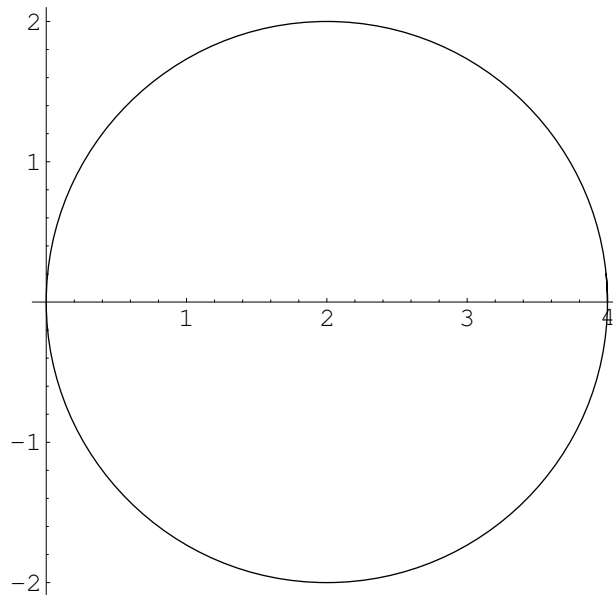
- b) Funktio $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ kuvaa hyperbeliä ja se leikkaa x -akselin kohdissa $x_1 = -2$ ja $x_2 = 2$.
Funktion asymptootit ovat suorat $y = \pm \frac{1}{2}x$.



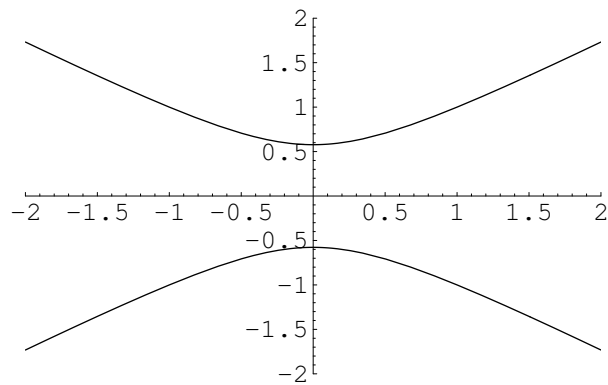
- c) Funktio $4x^2 + 25y^2 = 100 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ kuvaa ellipsiä ja se leikkaa x -akselin kohdissa $x_1 = -5$ ja $x_2 = 5$.



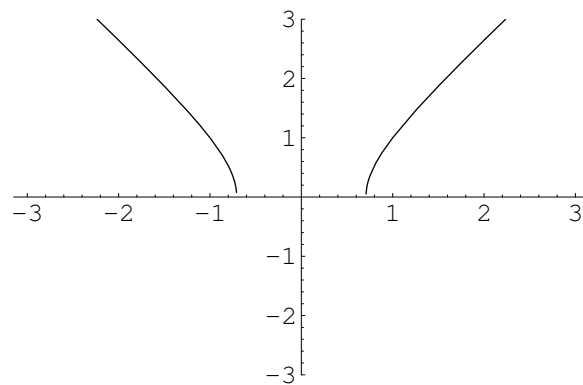
- d) Funktio $(x-2)^2 + y^2 = 4$ kuvaa ympyrää ja se leikkaa x -akselin kohdissa $x_1 = 0$ ja $x_2 = 4$.



- e) Funktio $2x^2 - 3y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{2}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = -1$ kuvaa hyperbeliä ja se ei leikkaa x -akselia.
Funktion asymptootit ovat suorat $y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}x$.



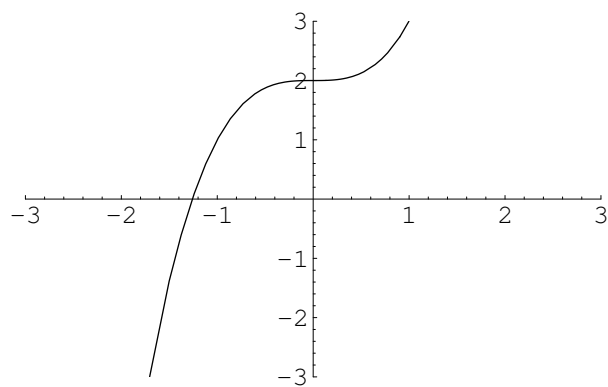
- f) Funktio $y = \sqrt{2x^2 - 1} \Leftrightarrow y^2 = 2x^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1/2} - \frac{y^2}{1} = 1$, kun $y \geq 0$ leikkaa x -akselin kohdissa $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ja $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



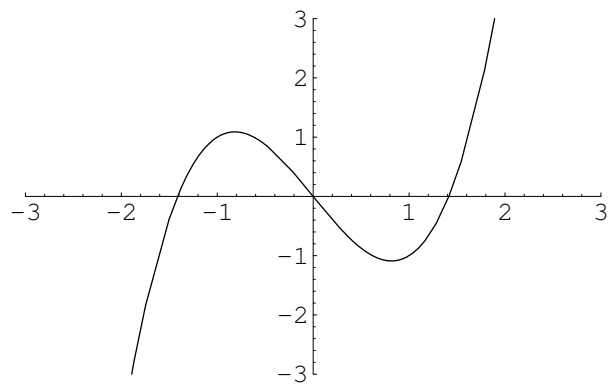
11.

- a) Selitä, mikä on käänteisfunktio. Anna esimerkki.
 b) Päätele funktion kuvaajan perusteella, onko funktiolla käänteisfunktio.

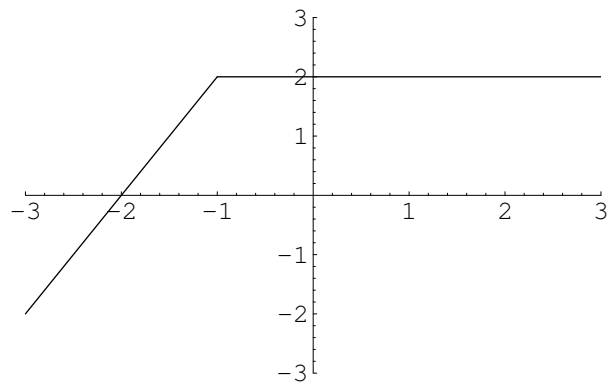
1)



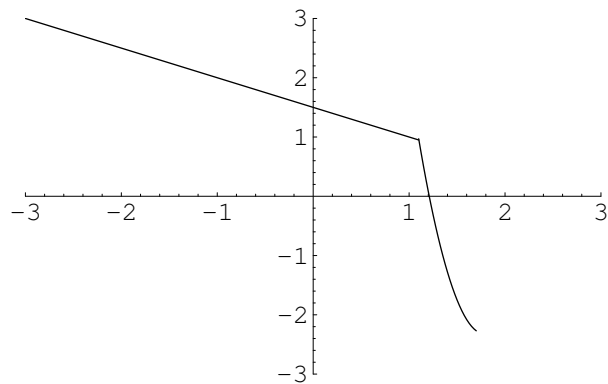
2)



3)



4)



c) Määritä funktion $f : [2, \infty[\rightarrow [-4, \infty[$, $f(x) = x^2 - 4x$ käänteisfunktio f^{-1} . Piirrä samaan koordinaatistoon funktioiden f ja f^{-1} kuvaajat. Laske edelleen $f^{-1}(140)$.

d) Muodosta funktiot $f \circ f^{-1}$ ja $f^{-1} \circ f$, kun $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

Vihje:

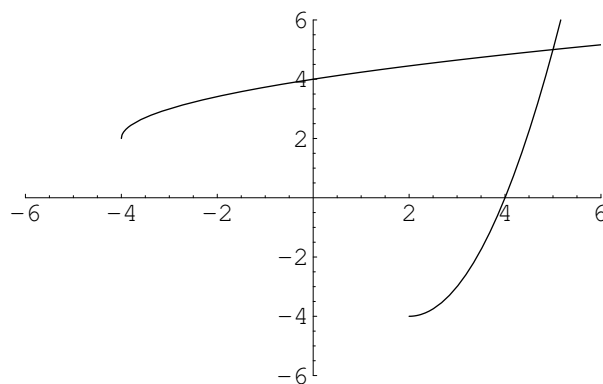
- * Käänteisfunktio
- * Reaalifunktion käänteisfunktio
- * Yhdistetyn funktion määritelmä

Vastaus:

- a) ks. Ratkaisu
- b) Kuvien 1 ja 4 kuvaajilla on olemassa käänteisfunktio, mutta kuvien 2 ja 3 kuvaajilla ei.
- c) $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{4+x}$ ja $f^{-1}(140) = 14$
- d) $f \circ f^{-1} = f(f^{-1}) = x$ ja $f^{-1} \circ f = f^{-1}(f) = x$

Ratkaisu:

- a) Funktion $f(x)$ käänteisfunktioita merkitään $f^{-1}(x)$. Jotta funktiolla olisi olemassa käänteisfunktio, on sen oltava joko aidosti kasvava tai aidosti vähenevä. Funktion käänteisfunktion määrittelyjoukkoa vastaa funktion arvojoukko ja arvojoukkoa määrittelyjoukko. Esimerkiksi funktiolla $f(x) = x^2$ ei ole käänteisfunktioita, mutta funktiolla $f(x) = x^3$ on.
- b) Kuvien 1 ja 4 kuvaajilla on olemassa käänteisfunktio, koska kuvaaja 1 on aidosti kasvava ja kuvaaja 4 aidosti vähenevä. Kuvien 2 ja 3 kuvaajilla ei ole olemassa käänteisfunktioita.
- c) Funktio $f(x) = x^2 - 4x$ on aidosti kasvava, kun $x \geq 2$, joten funktiolla on olemassa käänteisfunktio. Muodostetaan funktion $y = x^2 - 4x$ käänteisfunktio. Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä $y = x^2 - 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x - y = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{4+y}$. Vaihdetaan muuttujat x ja y keskenään. Saadaan $y = 2 \pm \sqrt{4+x}$. Kun lisäksi huomioidaan alkuperäisen funktion määrittely- ja arvojoukko, saadaan käänteisfunktioiksi $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{4+x}$, kun $x \in [-4, \infty[\rightarrow [2, \infty[$. Lisäksi $f^{-1}(140) = 14$.



- d) Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = 2x + 2$. Lasketaan yhdistetyt funktiot
- $$f \circ f^{-1} = f(f^{-1}) = \frac{1}{2}(2x + 2) - 1 = x \quad \text{ja}$$
- $$f^{-1} \circ f = f^{-1}(f) = 2\left(\frac{1}{2}x - 1\right) + 2 = x.$$

12.

- a) Ratkaise yhtälö $(\sqrt{1-2x}+1)^2 = 16$. (YO syksy 1994, tehtävä 1)
b) Ratkaise epäyhtälö $2|2-x| < \sqrt{x-2}$. (YO kevät 1995, tehtävä 1)
c) Ratkaise yhtälö $1+4\sqrt{1-x} = 4x$. (YO syksy 1983, tehtävä 3a)

Vastaus:

- a) $x = -4$
b) $2 < x < 2\frac{1}{4}$
c) $x = \frac{3}{4}$

Ratkaisu:

a) $(\sqrt{1-2x}+1)^2 = 16$ | $\sqrt{}$
 $\Leftrightarrow \sqrt{1-2x}+1 = 4$ | 2. pot
 $\Leftrightarrow 1-2x = 9$
 $\Leftrightarrow x = -4$, mikä toteuttaa reaalisuusehdon $1-2x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$.

b) $2|2-x| < \sqrt{x-2}$ | 2. pot
 $\Leftrightarrow 4(4-4x+x^2) < x-2$
 $\Leftrightarrow 4x^2 - 17x + 18 < 0$
 $\Rightarrow 4x^2 - 17x + 18 = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{17 \pm 1}{8}$
 $\Leftrightarrow x_1 = 2\frac{1}{4}, x_2 = 2$
 $\Rightarrow 2 < x < 2\frac{1}{4}$

c) $1+4\sqrt{1-x} = 4x$
 $\Leftrightarrow 4\sqrt{1-x} = 4x-1$
 $\Leftrightarrow \sqrt{1-x} = x - \frac{1}{4}$ | 2. pot
 $\Leftrightarrow 1-x = (x - \frac{1}{4})^2$
 $\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{15}{16} = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-\frac{1}{2} \pm 4}{2}$
 $\Leftrightarrow x_1 = \frac{3}{4}, x_2 = -\frac{5}{4}$

Yhtälön ratkaisu on $x = \frac{3}{4}$, mikä toteuttaa sekä reaalisuusehdon $1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ että toisen potenssin käytön seurauksena saadun ehdon $x - \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}$ eli ehdon $\frac{1}{4} < x \leq 1$.

13.

- a) Määritä yhtälön $(1+x+x^2)^2 = 1+x+x^2$ reaalijuuret. (YO kevät 1983 tehtävä 2)

- b) Millä a :n arvoilla yhtälön $x^2 + (3a + 1)x + 81 = 0$ juuret ovat reaaliset? (YO kevät 1988, tehtävä 3)
- c) Millä a :n arvoilla yhtälöllä $(a^2 - 3a + 2)x^2 - (a^2 - 5a + 4)x - (a^2 - a) = 0$ on enemmän kuin kaksi ratkaisua? (YO syksy 1994, tehtävä 5a)

Vastaus:

- a) $x = 0$ tai $x = -1$
- b) $a \leq \frac{-1 - \sqrt{324}}{4} \approx -6,333$ tai $a \geq \frac{-1 + \sqrt{324}}{4} \approx 5,667$
- c) $a = 1$

Ratkaisu:

- a) Merkitsemällä $1 + x + x^2 = y$ saadaan yhtälö $y^2 = y$, jonka juuret ovat $y_1 = 0$ ja $y_2 = 1$. Annettu yhtälö toteutuu siten, jos $1 + x + x^2 = 0$ tai $1 + x + x^2 = 1$. Edellisellä yhtälöllä ei ole reaaliuuria, koska $1 + x + x^2 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ kaikilla x :n reaaliarvoilla. Jälkimmäinen yhtälö voidaan muuntaa muotoon $x(1 + x) = 0$, joten sen juuret ovat $x = 0$ tai $x = -1$.
- b) Yhtälön $x^2 + (3a + 1)x + 81 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(3a+1) \pm \sqrt{9a^2 + 6a - 323}}{2}$ juuret ovat reaaliset silloin, kun toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan diskriminantti
- $$D = 9a^2 + 6a - 323 \geq 0$$
- $$\Leftrightarrow a \geq \frac{-1 + \sqrt{324}}{4}$$
- $$\Rightarrow a \leq \frac{-1 - \sqrt{324}}{4} \approx -6,333 \text{ tai } a \geq \frac{-1 + \sqrt{324}}{4} \approx 5,667.$$
- c) Koska toisen asteen yhtälöllä on normaalisti kaksi juurta, on ratkaisuja enemmän kuin kaksi silloin, kun kaikki yhtälön kertoimet ovat nollija. Tällöin ratkaisuja on ∞ määrä eli $x \in \mathbb{R}$.

$$(a^2 - 3a + 2)x^2 - (a^2 - 5a + 4)x - (a^2 - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \wedge a^2 - 5a + 4 = 0 \wedge a^2 - a = 0$$

$$\Leftrightarrow (a = 2 \vee a = 1) \wedge (a = 4 \vee a = 1) \wedge (a = 0 \vee a = 1)$$

$$\Leftrightarrow a = 1$$

14.

- a) Ratkaise yhtälö $-\sqrt{x+5} = x - 1$.
- b) Ratkaise epäyhtälö $x - \frac{1}{x} \leq \frac{x+1}{x}$.
- c) Piirrä käyrä $y = |x| + |x - 1|$ sekä ratkaise sen avulla epäyhtälö $|x| + |x - 1| < 2$. (YO kevät 1979, tehtävä 3)
- d) Piirrä käyrä $y = x - |x - 2|$ ja ratkaise sitä apuna käyttäen $3x - 3|x - 2| = x^2$. Tarkat arvot. (YO syksy 1993, tehtävä 4b)

Vastaus:

- a) $x = -1$
 b) $x \leq -1 \vee 0 < x \leq 2$
 c) $-\frac{1}{2} < x < 1\frac{1}{2}$
 d) $x = 3 - \sqrt{3}, x = \sqrt{6}$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & -\sqrt{x+5} = x-1 \\
 & \Leftrightarrow \sqrt{x+5} = 1-x \quad | \cdot 2. \text{ pot} \\
 & \Leftrightarrow x+5 = (1-x)^2 \\
 & \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \\
 & \Leftrightarrow x_1 = 4, x_2 = -1
 \end{aligned}$$

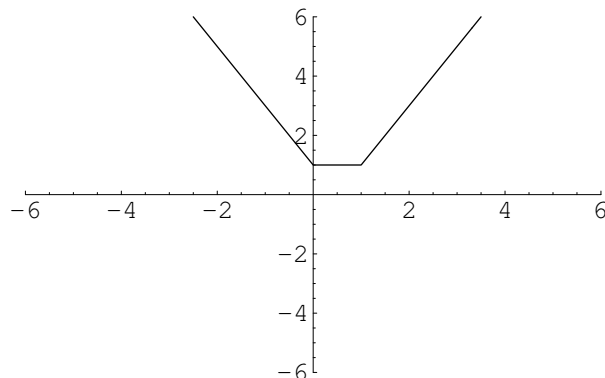
Ratkaisu $x = -1$ täyttää sekä reaalisuusehdon $x+5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5$ että toisen potenssin käytön seurauksena saadun ehdon $1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ eli ehdon $-5 \leq x \leq 1$.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } & x - \frac{1}{x} \leq \frac{x+1}{x} \\
 & \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x} \leq \frac{x+1}{x} \\
 & \Leftrightarrow \frac{x^2-x-2}{x} \leq 0
 \end{aligned}$$

Osamäärän osoittaja saa negatiivisia arvoja, kun $-1 \leq x \leq 2$ ja nimittäjä, kun $x < 0$. Tällöin osamäärä saa negatiivisia arvoja, kun $x \leq -1$ tai $0 < x \leq 2$.

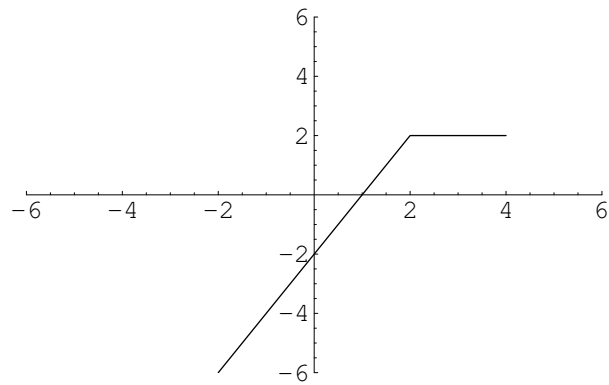
$$\text{c) Tarkastellaan kuvaajaa } y = |x| + |x-1| = \begin{cases} -2x+1, & \text{kun } x \leq 0 \\ 1, & \text{kun } 0 < x < 1 \\ 2x-1, & \text{kun } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{paloittain, kun } x \leq 0,$$

$0 < x < 1$ ja $x \geq 1$.



Kuvaajasta nähdään, että epäyhtälö $|x| + |x-1| < 2$ toteutuu, kun $-\frac{1}{2} < x < 1\frac{1}{2}$.

d) Tarkastellaan kuvaajaa $y = x - |x - 2|$ $\begin{cases} 2x - 2, & \text{kun } x < 2 \\ 2, & \text{kun } x \geq 2 \end{cases}$ paloittain, kun $x < 2$ ja $x \geq 2$.



Yhtälö

$$3x - 3|x - 2| = x^2$$

$$\Leftrightarrow 3(x - |x + 2|) = x^2$$

$$\Leftrightarrow x - |x + 2| = \frac{1}{3}x^3$$

toteutuu, kun

$$2x - 2 = \frac{1}{3}x^2$$

$$\Leftrightarrow x = 3 - \sqrt{3} \approx 1,268 \text{ ja } 2 = \frac{1}{3}x^2$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{6} \approx 2,450.$$