

Funktio

1.

- a) Mikä on funktion $f(x) = x^2 + 1$ lähtöjoukko eli määrittelyjoukko, kun $0 \leq x \leq 5$?
- b) Mikä on funktion $f(x) = x^2 + 1$ maalijoukko eli arvojoukko?
- c) Selitä, mikä on funktion nollakohta. Anna esimerkki.
- d) Mitä tarkoittaa funktion jatkuvuus?

Vihje:

- * Funktiokäsite
- * Funktion jatkuvuus

2. Ratkaise funktion f nollakohdat ja piirrä kuvaaja.

- a) $f(x) = 2x + 1$
- b) $f(x) = \frac{1}{2}x - 5$
- c) $f(x) = x^2 - 2$
- d) $f(x) = 2x^2 - x + 1$

Vihje:

- * Funktion kuvaaja

3. Ratkaise funktion f nollakohdat ja piirrä kuvaaja.

- a) $f(a) = 5a^3$
- b) $f(a) = 2\frac{3}{4}a^3 + 4$, kun $-2 \leq a \leq 2$
- c) $f(a) = a^3 - 3a - 1$, kun $-5 \leq a \leq 1$
- d) $f(x) = 4x^4$, kun $f(x) > 1$

4. Ratkaise funktion f nollakohdat ja piirrä kuvaaja.

- a) $f(x) = |2x - 2|$
- b) $f(x) = -|2x + 2| + 4$

- c) $f(x) = |x^2 - 2x| - 4$
- d) $f(x) = |x + 2| + |x - 1| - (x + 1)$
- e) $f(x) = |x^3 - 3x^2 + 2| - 5$

5. Ratkaise funktion f nollakohdat ja piirrä kuvaaja.

- a) $f(x) = \sqrt{x}$
- b) $f(x) = \sqrt{-x}$
- c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
- d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Vihje:

* Juurifunktiot

6. Piirrä funktion f kuvaaja ja ratkaise nollakohdat.

- a) $f(x) = \cos(x) + 2$
- b) $f(x) = \tan(x)$
- c) $f(x) = \sqrt{(\sin(x))^2}$
- d) $f(x) = \sin(x) + x$
- e) $f(x) = -|\sin(x)| - \frac{1}{2}x$

Vihje:

* Trigonometrysten funktioiden kuvaajat

7. Ratkaise funktion f nollakohdat ja piirrä kuvaaja.

- a) $f(x) = \ln x$
- b) $f(x) = \ln(x - 2)$
- c) $f(x) = 10^x$

8. Ratkaise funktion nollakohdat ja piirrä kuvaaja.

$$\text{a) } y = \begin{cases} x + 1, & \text{kun } x < 0 \\ 3x + 1, & \text{kun } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } y = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{kun } x \geq 0 \\ -x^2 + \frac{1}{2}, & \text{kun } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } y = \begin{cases} 2, & \text{kun } x \leq 1 \\ -x, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$$

Vihje: Tarkastele funktiota paloittain.

9. Piirrä funktion kuvaaja. Määritä nollakohdat ja asymptootit.

$$\text{a) } y = \frac{2}{x-1}$$

$$\text{b) } y = \frac{x}{x^2-1}$$

$$\text{c) } y = \frac{x^2+1}{x}$$

$$\text{d) } y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$\text{e) } y = \frac{x^3+5x^2-4}{2x^2}$$

Vihje:

* Asymptootit

* Liittohyperbeli ja asymptootit

10. Piirrä kuvaaja. Määritä mahdolliset asymptootit ja kohdat, joissa kuvaaja leikkaa x -akselin.

$$\text{a) } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\text{b) } \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$$

$$\text{c) } 4x^2 + 25y^2 = 100$$

$$\text{d) } (x-2)^2 + y^2 = 4$$

$$\text{e) } 2x^2 - 3y^2 + 1 = 0$$

$$\text{f) } y = \sqrt{2x^2 - 1}$$

Vihje:

* Ympyrä ja sen yhtälö

* Hyperbeli

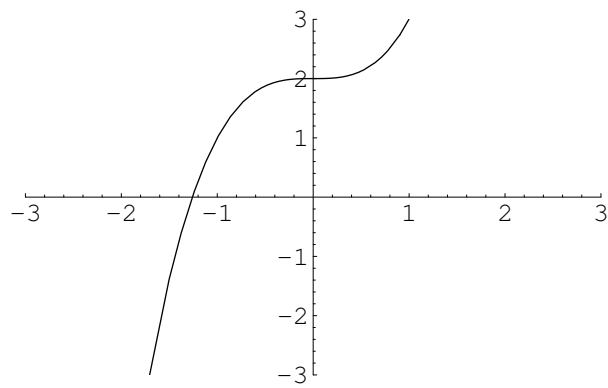
* Ellipsi

11.

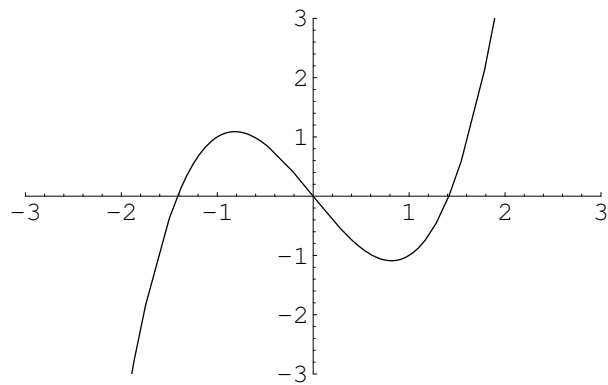
a) Selitä, mikä on käänteisfunktio. Anna esimerkki.

b) Päätele funktion kuvaajan perusteella, onko funktiolla käänteisfunktio.

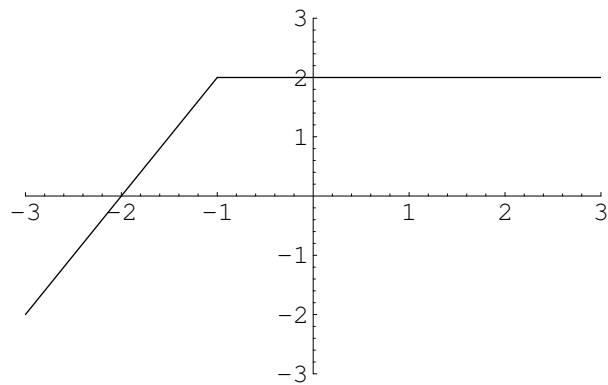
1)



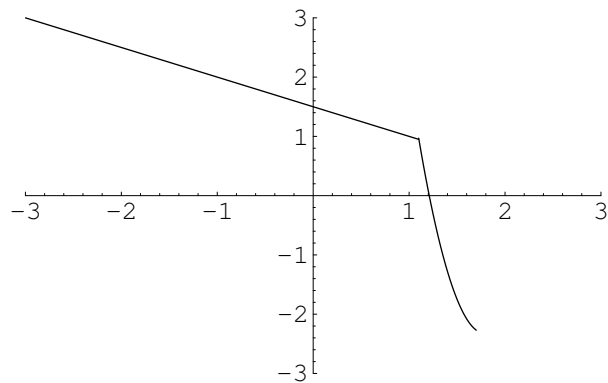
2)



3)



4)



- c) Määritä funktion $f : [2, \infty[\rightarrow [-4, \infty[$, $f(x) = x^2 - 4x$ käänteisfunktio f^{-1} . Piirrä samaan koordinaatistoon funktioiden f ja f^{-1} kuvaajat. Laske edelleen $f^{-1}(140)$.
- d) Muodosta funktiot $f \circ f^{-1}$ ja $f^{-1} \circ f$, kun $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

Vihje:

- * Käänteisfunktio
- * Reaalifunktion käänteisfunktio
- * Yhdistetyn funktion määritelmä

12.

- a) Ratkaise yhtälö $(\sqrt{1-2x} + 1)^2 = 16$. (YO syksy 1994, tehtävä 1)
- b) Ratkaise epäyhtälö $2|2-x| < \sqrt{x-2}$. (YO kevät 1995, tehtävä 1)
- c) Ratkaise yhtälö $1 + 4\sqrt{1-x} = 4x$. (YO syksy 1983, tehtävä 3a)

13.

- a) Määritä yhtälön $(1 + x + x^2)^2 = 1 + x + x^2$ reaaliuureet. (YO kevät 1983 tehtävä 2)
- b) Millä a :n arvoilla yhtälön $x^2 + (3a + 1)x + 81 = 0$ juuret ovat reaaliset? (YO kevät 1988, tehtävä 3)
- c) Millä a :n arvoilla yhtälöllä $(a^2 - 3a + 2)x^2 - (a^2 - 5a + 4)x - (a^2 - a) = 0$ on enemmän kuin kaksi ratkaisua? (YO syksy 1994, tehtävä 5a)

14.

- a) Ratkaise yhtälö $-\sqrt{x+5} = x-1$.
- b) Ratkaise epäyhtälö $x - \frac{1}{x} \leq \frac{x+1}{x}$.
- c) Piirrä käyrä $y = |x| + |x-1|$ sekä ratkaise sen avulla epäyhtälö $|x| + |x-1| < 2$. (YO kevät 1979, tehtävä 3)
- d) Piirrä käyrä $y = x - |x-2|$ ja ratkaise sitä apuna käyttäen $3x - 3|x-2| = x^2$. Tarkat arvot. (YO syksy 1993, tehtävä 4b)