

Differentiaalilaskenta

1.

- a) Mikä on tangentti? Mikä on sekantti?
- b) Määrittele funktion monotonisuuteen liittyvät käsitteet: kasvava, aidosti kasvava, vähenevä ja aidosti vähenevä. Anna esimerkit.
- c) Selitä, mitä funktion raja-arvolla tarkoitetaan. Anna esimerkki.
- d) Määrittele funktion ääriarvoihin liittyvät käsitteet: globaali ja lokaali maksimi ja minimi. Anna esimerkit.
- e) Mikä on derivaatta? Anna esimerkki.

Vihje:

- * Derivaatta
- * Sekantti ja tangentti
- * Funktion kasvavuus ja vähenevyys
- * Funktion kasvavuus ja vähenevyys; paikalliset ääriarvot
- * Funktion raja-arvon määritelmä
- * Toispuoliset raja-arvot; raja-arvo ∞ ja raja-arvo äärettömyydessä
- * Absoluuttinen maksimi ja minimi
- * Derivaatan määritelmä
- * Derivoituvuus

Vastaus:

- a) Sekantti on suora, joka leikkaa tarkasteltavaa käyrää vähintään kahdessa pisteessä. Olkoon leikkauspiste P kiinteä ja lähestyköön toinen leikkauspiste Q sitä käyrää pitkin. Jos käyrä on sileä pisteen P kohdalla, ts. kyseessä ei ole käyrällä oleva kärkipiste tai muulla tavoin epäsäännöllinen piste, kääntyy sekantti tällöin suoraksi, joka sivuaa käyrää pisteesä P . Siitä tulee tällöin käyrän tangentti eli sivuaaja.
- b) Reaalimuuttujan reaaliarvoista funktiota kutsutaan kasvavaksi, jos kaikilla tarkastelujoukkoon kuuluvilla arvoilla x_1, x_2 pätee: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. Jos funktionarvojen välillä ei sallita yhtäsuuruutta, funktio on aidosti kasvava: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Ehdot $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ ja $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ merkitsevät vastaavasti, että funktio on vähenevä ja aidosti vähenevä. Esimerkiksi funktio $f(x) = x^2$ on aidosti vähenevä, kun $x < 0$ ja aidosti kasvava, kun $x > 0$. Paloittainen funktio

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x < -2 \\ -2, & \text{kun } x \geq -2 \end{cases} \quad \text{taas on kasvava, mutta ei aidosti kasvava.}$$

- c) Jotta funktion f raja-arvo pisteessä a olisi b (merkitään $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)) = b$), on tilanteen oltava sellainen, että asetetaanpa miten tiukka etäisyysvaatimus tahansa, funktion arvot ovat tätä etäisyyttä lähempänä arvoa b , kun muuttuja x rajoitetaan riittävän lähelle tarkastelukohtaa a . Esimerkiksi funktion $f(x) = -x^2$ raja-arvo on 0, kun x lähestyy nollaa. Huomaa, että raja-arvo on olemassa, koska funktio lähestyy samaa arvoa raja-arvon molemmilta puolilta. Funktion f raja-arvo on ∞ , kun x lähestyy ääretöntä ($x \rightarrow \infty$) tai miinus-ääretöntä ($x \rightarrow -\infty$).
- d) Funktion f lokaali eli paikallinen maksimi on sellainen piste, jossa funktion arvo on suurempi kuin pisteen välittömässä ympäristössä. Paikallinen minimi on vastaavasti sellainen piste, jossa funktion arvo on pienempi kuin pisteen välittömässä ympäristössä. Funktion globaali maksimi on funktion suurin paikallinen maksimi ja globaali minimi vastaavasti pienin paikallinen minimi.
- e) Funktion $f(x)$ derivaatta $f'(x_0)$ kuvaa tangentin kulmakerrointa tietyssä pisteessä x_0 . Derivaatta kuvaa käyrän jyrkkyyttä ja siksi myös kasvavuutta ja vähenevyyttä. Esimerkiksi funktion $f(x) = 3x^2 + x$ derivaatta on $f'(x) = 6x + 1$. Kohdassa $x = 1$ tangentin kulmakerroin on $f'(1) = 7$. Funktion tiedetään siis olevan kasvava kohdassa $x = 1$, koska derivaatta on ≥ 0 .

2. Laske raja-arvo

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} (5 - 2x)$
- b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x-1}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 3} \lg(x^2 + 1) + 3^x$
- d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \sin 2x$

Vihje:

* Funktioiden standardiraja-arvoja

Vastaus:

- a) 1
- b) $2\frac{1}{2}$
- c) 28
- d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ratkaisu:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} (5 - 2x) = 5 - 4 = 1$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x-1} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 3} \lg(x^2 + 1) + 3^x = \lg 10 + 3^3 = 28$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. Laske raja-arvo

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2 + x} - \frac{1}{x} \right)$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

Vastaus:

$$\text{a) } 0$$

$$\text{b) } -1$$

$$\text{c) } \frac{1}{2}$$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2 + x} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x+1} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(\sqrt{x}+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4. Laske raja-arvo

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x^2 + 2)$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{2x^2 + x + 4}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{x}$$

Vihje:

* Reaalilukujoukon välit

Vastaus:

- a) $-\infty$
- b) $\frac{1}{2}$
- c) $-\sqrt{2}$

Ratkaisu:

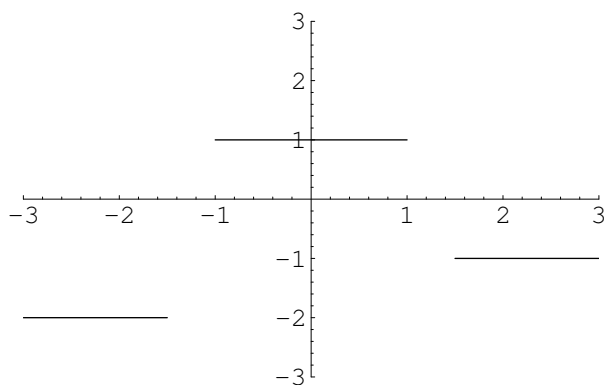
$$\begin{aligned}\text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x^2 + 2) \\&= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\right) \\&= -\infty(1 - 0 - 0) = -\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{2x^2 + x + 4} \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2})}{x^2(2 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2})} \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2})}{(2 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2})} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

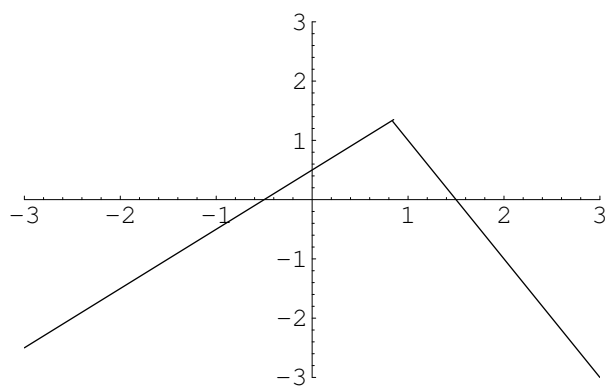
$$\begin{aligned}\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{x} \\&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2(2 + \frac{1}{x^2})}}{x} \\&= \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{x} \\&= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{x} = -\sqrt{2}\end{aligned}$$

5. Pohdi, onko alla olevilla funktioilla derivaatta kaikkialla?

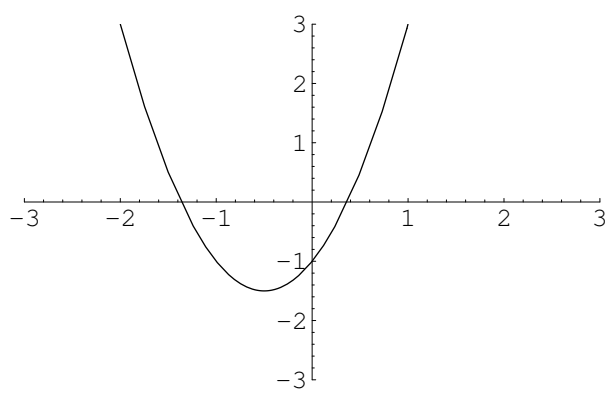
a)



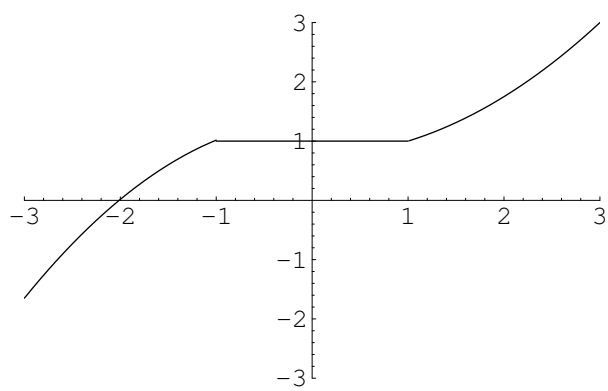
b)



c)



d)



Vastaus:

a) Ei

b) Ei

- c) On
- d) Ei

Ratkaisu:

- a) Ei ole. Funktio ei ole jatkuva kaikkialla, silloin se ei myöskään ole derivoituva kaikkialla.
- b) Ei ole. Kuvaajan kärkipisteessä ei ole yksiselitteisesti määriteltyä derivaattaa.
- c) On.
- d) Ei ole. Funktio ei ole aidosti kasvava.

6. Ovatko alla olevat väittämät tosia? Perustele tai anna vastaesimerkki.

- a) Jos $f(x)$ ei ole jatkuva kohdassa x_0 , se ei ole myöskään derivoituva kohdassa x_0 .
- b) Funktiolla on derivaatta kaikkialla, jos se on kasvava.
- c) Jatkuvan funktion suljetulla välillä saamien arvojen joukossa ei välttämättä ole suurinta ja pienintä arvoa.
- d) Jos suljetulla välillä jatkuva funktio saa välin päätepisteissä erimerkkiset arvot, niin funktiolla on ainakin yksi nollakohta tällä välillä.
- e) Jos $f(x)$ on derivoituva kohdassa x_0 , niin se on myös jatkuva kohdassa x_0 .
- f) Funktiolla f on kohdassa x_0 raja-arvona a vain, jos $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = a$.

Vastaus:

- a) Tosi
- b) Epätosi
- c) Epätosi
- d) Tosi
- e) Tosi
- f) Tosi

Ratkaisu:

- a) Tosi.
- b) Epätosi. Jotta funktiolla on derivaatta kaikkialla sen tulee olla aidosti kasvava. Pelkkä kasvavuus ei ole riittävä ehto.

c) Epätosi. Koska väli on suljettu, on välillä välttämättä suurin ja pienin arvo. Funktio voi saada suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdissa. Suurin ja pienin arvo voi olla sama arvo.

d) Tosi.

e) Tosi.

f) Tosi.

7. Derivoi

a) $f(x) = \pi$

b) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 3$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x^{162} - \frac{1}{2}x^{102} + x + 1$

Vihje:

- * Summan, vakiokerrannaisen, tulon ja osamäärän derivaatta
- * Luettelo derivaatoista
- * Yhdistetyn funktion derivaatta

Vastaus:

a) $f'(x) = 0$

b) $f'(x) = 6x^2 - 10x + 4$

c) $f'(x) = 54x^{161} - 51x^{101} + 1$

8. Derivoi

a) $f(x) = (x^3 - 5x)^7$

b) $f(x) = (x^2 - x)(x^3 + 3x)$

c) $f(x) = (2x - 1)^3(3x + 2)^2$

Vastaus:

a) $f'(x) = 7(x^3 - 5x)^6(3x^2 - 5)$

b) $f'(x) = x(5x^3 - 4x^2 + 9x - 6)$

c) $f'(x) = 6(2x - 1)^2(3x + 2)(5x + 1)$

Ratkaisu:

a) $f'(x) = 7(x^3 - 5x)^6(3x^2 - 5)$

b) $f'(x) = (2x - 1)(x^3 + 3x) + (x^2 - x)(3x^2 + 3) = 5x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 6x = x(5x^3 - 4x^2 + 9x - 6)$

c) $f'(x) = 6(2x - 1)^3(3x + 2) + 6(3x + 2)^2(2x - 1)^2$
 $= 6(2x - 1)^2(3x + 2)[(2x - 1) + (3x + 2)]$
 $= 6(2x - 1)^2(3x + 2)(5x + 1)$

9. Derivoi

a) $f(x) = \sqrt{2x - 1}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{6x^2 + 1}$

c) $f(x) = x\sqrt[3]{6x + 1}$

Vastaus:

a) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$

b) $f'(x) = \frac{4x}{\sqrt[3]{(6x^2+1)^2}}$

c) $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt[3]{(6x+1)^2}} + \sqrt[3]{6x+1}$

Ratkaisu:

a) $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2}(2x - 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$

b) $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 12x(6x^2 + 1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{4x}{\sqrt[3]{(6x^2+1)^2}}$

c) $f'(x) = 2x(6x + 1)^{-\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{6x + 1} = \frac{2x}{\sqrt[3]{(6x+1)^2}} + \sqrt[3]{6x + 1}$

10. Derivoi

a) $f(x) = \frac{1}{(x^3 + 2x)^2}$

b) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

c) $f(x) = \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^3$

Vastaus:

$$\text{a) } f'(x) = -\frac{2(3x^2+2)}{(x^3+2x)^4}$$

$$\text{b) } f'(x) = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$$

$$\text{c) } f'(x) = \frac{3x^5(x+2)}{(x+1)^4}$$

Ratkaisu:

$$\text{a) } f'(x) = \frac{0-2(x^3+2x)(3x^2+2)}{(x^3+2x)^4} = -\frac{2(3x^2+2)}{(x^3+2x)^4}$$

$$\text{b) } f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1)-2x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$$

$$\text{c) } f'(x) = 3\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2 \cdot \frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2} = 3\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2 \cdot \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{3x^6+6x^5}{(x+1)^4} = \frac{3x^5(x+2)}{(x+1)^4}$$

11. Derivoi

$$\text{a) } f(x) = (\sin(x))^2$$

$$\text{b) } f(x) = (\cos(x))^3$$

$$\text{c) } f(x) = \sin(x) + \cos(x)$$

$$\text{d) } f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$$\text{e) } f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\text{f) } f(x) = x \cdot \sin(x)$$

$$\text{g) } f(x) = \sin(2x) + \cos(3x^2)$$

Vastaus:

$$\text{a) } f'(x) = \sin(2x)$$

$$\text{b) } f'(x) = -3\sin(x)(\cos(x))^2$$

$$\text{c) } f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$$

$$\text{d) } f'(x) = \cos(2x)$$

$$\text{e) } f'(x) = \frac{1}{(\cos(x))^2}$$

$$\text{f) } f'(x) = x\cos(x) + \sin(x)$$

$$\text{g) } f'(x) = 2(\cos(2x) - 3x\sin(3x^2))$$

Ratkaisu:

- a) $f'(x) = 2 \sin(x) \cos(x) = \sin(2x)$
- b) $f'(x) = 3(\cos(x))^2(-\sin(x)) = -3 \sin(x)(\cos(x))^2$
- c) $f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$
- d) $f'(x) = \sin(x)(-\sin(x)) + (\cos(x))^2 = (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2 = \cos(2x)$
- e) $f'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - (-\sin(x))\sin(x)}{(\cos(x))^2} = \frac{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} = \frac{1}{(\cos(x))^2}$
- f) $f'(x) = x \cos(x) + \sin(x)$
- g) $f'(x) = 2 \cos(2x) - 6x \cdot \sin(3x^2) = 2(\cos(2x) - 3x \sin(3x^2))$

12. Derivoi

- a) $f(x) = \ln 2x$
- b) $f(x) = (\ln x)^2$
- c) $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$
- d) $f(x) = \log_2 x$
- e) $f(x) = e^{-2x}$
- f) $f(x) = xe^x + 2^{x-1}$

Vastaus:

- a) $f'(x) = \frac{1}{x}$
- b) $f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$
- c) $f'(x) = \frac{2}{x^2-1}$
- d) $f'(x) = \frac{1}{x \ln 2}$
- e) $f'(x) = -2e^{-2x}$
- f) $f'(x) = e^x(x+1) + 2^{x-1} \ln 2$

Ratkaisu:

- a) $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2x} = \frac{1}{x}$
- b) $f'(x) = 2 \ln x \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x}$
- c) $f'(x) = \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{x^2-1}$

$$d) f'(x) = \frac{1}{x \ln 2}$$

$$e) f'(x) = -2e^{-2x}$$

$$f) f'(x) = xe^x + e^x + 2^{x-1} \ln 2 = e^x(x+1) + 2^{x-1} \ln 2$$

13.

a) Laske funktion $f(x) = 2x^2 - 5x + 27$ derivaatta kohdassa $x = 2$.

b) Olkoon $f(x) = (3x - 5)^2$. Ratkaise yhtälö $f'(x) = 4$.

c) Määritä paraabelin $y = x^2 - 4x + 3$ huipun koordinaatit.

Vastaus:

$$a) f'(2) = 3$$

$$b) x = 1\frac{8}{9}$$

$$c) (2, -1)$$

Ratkaisu:

$$a) f'(x) = 4x - 5, \\ f'(2) = 4 \cdot 2 - 5 = 3$$

$$b) f'(x) = 6(3x - 5) = 18x - 30, \\ f'(x) = 4 \\ \Leftrightarrow 6(3x - 5) = 4 \\ \Leftrightarrow 18x - 30 = 4 \\ \Leftrightarrow 18x = 34 \\ \Leftrightarrow x = \frac{34}{18} = \frac{17}{9} = 1\frac{8}{9}$$

c) Derivoidaan funktio:

$$y' = 2x - 4.$$

Huippu löytyy derivaatan nollakohdasta.

$$2x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow y = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$$

V :Huippu on kohdassa $(2, -1)$

14. Määritä paraabelin $y = x^2 - 2x - 1$ pisteeseen $(2, -1)$ piirretyn tangentin yhtälö.

Vihje: Suoran yhtälö $y - y_0 = k(x - x_0)$, kun suoran kulmakerroin on k ja suora kulkee pisteen (x_0, y_0) kautta.

Vastaus: $y = 2x - 5$

Ratkaisu: Tangentin kulmakerroin saadaan sijoittamalla $x = 2$ derivattaan:

$$y' = 2x - 2,$$

$$f'(2) = k = 2 \cdot 2 - 2 = 2.$$

Suoran yhtälö saadaan kaavasta

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Sijoittamalla $(x_0, y_0) = (2, -1)$ saadaan suoralle yhtälö

$$y = 2x - 5.$$

15. Missä pisteessä suoran $y = -2x + 1$ suuntainen tangentti sivuaa käyrää $y = -3x^2 + x$?

Vastaus: Pisteessä $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

Ratkaisu: Koska kyseinen tangentti on suoran $y = 2x + 1$ suuntainen, on sen kulmakerroin $k = 2$. Tällöin saadaan

$$y' = -6x + 1 = 2$$

$$\Leftrightarrow -6x = -3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Funktion y :n arvo saadaan sijoittamalla saatu x :n arvo käyrän yhtälöön:

$$y = -3 \cdot (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.$$

Leikkauspiste on siis $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$.

16. Missä kulmassa käyrät $y = x^2 - 2x$ ja $y = x^2 - 5x + 6$ leikkaavat toisensa?

Vihje:

* Yhtälöryhmä

Vastaus: $\alpha = 71,6$

Ratkaisu: Leikkauspiste saadaan yhtälöstä

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2x$$

$$\Leftrightarrow 3x = 6$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Leikkauspisteen y :n arvo saadaan sijoittamalla saatu x :n arvo käyrän yhtälöön:

$$y = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0.$$

Leikkauspiste on siis $(\frac{1}{2}, 0)$. Kulmakertoimet kyseisessä pisteessä saadaan derivaatoista:

$$y'_1 = 2x - 1, \text{ jolloin } k_1 = 2 \cdot 2 - 2 = 2 \text{ ja}$$

$$y'_2 = 2x - 5, \text{ jolloin } k_2 = 2 \cdot 2 - 5 = -1.$$

Suorien välinen kulma saadaan kaavasta

$$\tan \alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|$$

$$\Leftrightarrow \tan \alpha = \left| \frac{3}{-1} \right|$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 71,6.$$

17. Osoita, että käyrät $y = x^2$ ja $y = -x^2 + 2x - \frac{1}{2}$ sivuavat toisiaan.

Ratkaisu: Kun käyrät sivuavat toisiaan, niiden tangenttien kulmakerroin on sama ainakin jos-sain yhteisessä pisteessä. Yhteinen piste saadaan yhtälöstä

$$\begin{aligned}
 x^2 &= -x^2 + 2x - \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + \frac{1}{2} &= 0 \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2} \\
 \Rightarrow y &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

On siis olemassa yhteinen piste, joka on $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Käyrien kulmakertoimet saadaan derivaatasta:

$$y'_1 = 2x \Rightarrow k_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ ja}$$

$$y'_2 = -2x + 2 \Rightarrow k_2 = -2 \cdot \frac{1}{2} + 2 = 1.$$

Yhteisessä pisteessä $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ kulmakertoimet ovat samat:

$$k_1 = k_2 = 1$$

□

18. Määritä funktion $f : f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$ suurin ja pienin arvo.

Vihje: Funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa joko välin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdissa.

Vastaus: Suurin arvo $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$, pienin arvo $f(-\sqrt{2}) = -2$.

Ratkaisu:

$$f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow -x + \sqrt{4 - x^2} = 0, x \neq \pm 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = x$$

$$\Leftrightarrow 4 - x^2 = x^2, x > 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Merkkikaaviosta ja kuvaajasta tarkastelemalla nähdään, että maksimi on kohdassa $x = \sqrt{2}$, jolloin $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$, ja minimi kohdassa $x = -\sqrt{2}$, jolloin $f(-\sqrt{2}) = -2$.

19. Millä x :n arvoilla funktio $f : f(x) = x^5(2x - 3)^4$ on aidosti kasvava?

Vastaus: Funktio on aidosti kasvava, kun $x < \frac{5}{6}, x > \frac{3}{2}$.

Ratkaisu: Derivoidaan funktio ja etsitään sen nollakohdat:

$$f'(x) = x^4(2x - 3)^3(18x - 15) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 = 0 \text{ tai } 2x - 3 = 0 \text{ tai } 18x - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ tai } x = \frac{3}{2} \text{ tai } x = \frac{5}{6}.$$

Funktio on aidosti kasvava, kun $f'(x) > 0$. Kohdassa $x = 0$ kyseinen funktio on myös aidosti kasvava, vaikka $f(0) = 0$, koska funktio on kohdan ympäristössä aidosti kasvava. Tarkastelemalla merkkikaaviota saadaan vastaukseksi $x < \frac{5}{6}, x > \frac{3}{2}$.

20. Määritä ne käyrän $y = (x + 1)^4 - 4x$ pisteet, joissa käyrän tangentti on vaakasuora (YO kevät 1992 tehtävä 2).

Vastaus: Tangentti on vaakasuora pisteessä $(0, 1)$

Ratkaisu: Tangentti on vaakasuora derivaatan nollakohdassa.

Derivoidaan funktio ja etsitään sen nollakohdat:

$$f'(x) = 4(x + 1)^3 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 = 1$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

Muuttujan y arvo kohdassa $x = 0$:

$$y = (0+1) - 4 \cdot 0 = 1$$

Tangentti on siis vaakasuora koordinaatiston pisteessä $(0, 1)$

21. Määritä funktion $f : f(x) = x\sqrt{4-x}$ ääriarvot.

Vastaus: Maksimi $f(2\frac{2}{3}) = \frac{16\sqrt{3}}{3}$, minimiä ei ole.

Ratkaisu: Derivoidaan funktio ja etsitään sen nollakohdat:

$$f'(x) = \sqrt{4-x} - \frac{x}{2\sqrt{4-x}} = \frac{8-3x}{2\sqrt{4-x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 8-3x = 0, x < 4$$

$$\Leftrightarrow -3x = -8$$

$$\Leftrightarrow x = 2\frac{2}{3}$$

Merkkikaaviota tarkastelemalla saadaan maksimikohdaksi $f(2\frac{2}{3}) = \frac{16\sqrt{3}}{3}$. Minimiiä ei ole.

22. Määritä funktion $f(x) = \frac{x^2+x+2}{x^2+2}$ derivaatan nollakohdat.

Vihje: Huomioi, että murtolausekkeen nimittäjä ei saa olla nolla.

Vastaus: $x = \pm\sqrt{2}$

Ratkaisu: Derivoidaan funktio ja etsitään derivaatan nollakohdat:

$$f'(x) = \frac{(x^2+2)(2x+1) - (x^2+x+2)(2x)}{(x^2+2)^2} = \frac{2x^3+4x+x^2+2 - (2x^3+2x^2+4x)}{(x^2+2)^2} = \frac{-x^2+2}{(x^2+2)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2 = 0, x^2 \neq -2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

23. (*) Johda derivaatan määritelmän perusteella $f'(-1)$, kun $f(x) = \sqrt{1-3x}$.

Ratkaisu: Derivaatan määritelmän

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

mukaan

$$f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-3(-1+h)} - \sqrt{1-3(-1)}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3-3h} - \sqrt{4}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-3h} - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3}{\sqrt{4-3h} + 2}$$

$$= -\frac{3}{4}$$

Koska $-\frac{3}{4}$ kuuluu määrittelyjoukkoon

$$1-3x > 0$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{1}{3},$$

$$f'(-1) = -\frac{3}{4}.$$

24. (*) Osoita, että yhtälöllä $x^3 + 3x - 10 = 0$ on täsmälleen yksi reaalijuuri. Määritä sen 2-desimaalinen likiarvo.

Vihje: Osoita ensin, että yhtälöllä on ainakin yksi nollakohta (esimerkiksi Bolzanon lauseen avulla) ja sen jälkeen että sillä on täsmälleen yksi nollakohta (esimerkiksi funktion monotonisuuden avulla).

* Algebran peruslause

* Juuret

Ratkaisu: Osoitetaan, että funktiolla on ainakin yksi nollakohta:

$$f(0) = -10$$

$$f(2) = 4.$$

Koska merkki vaihtuu välillä $[0, 2]$ ja f on jatkuva välillä $0 < x < 2$, Bolzanon lauseen mukaan funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä $0 < x < 2$.

Osoitetaan, että funktiolla on korkeintaan yksi nollakohta.

$$f'(x) = 3x^2 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = -1$$

Merkkikaaviota tarkastelemalla näemme, että funktio on aidosti kasvava, jolloin funktiolla on täsmälleen yksi nollakohta. Haarukoidaan nollakohdan likiarvo:

$$f(1) = -6$$

$$f(2) = 4$$

$$f(1,6) = -1,104$$

$$f(1,7) = 0,013$$

$$f(1,69) = -0,10$$

$$f(1,698) = -0,01$$

$$f(1,699) = 0,00$$

Nollakohdan kaksidesimaalinen likiarvo on siis $x = 1,70$.

25. (*) Pallo heitetään suoraan ylöspäin 15 metriä korkean talon katolta nopeudella 22 m/s. Sen korkeus maan pinnalta metreinä saadaan silloin yhtälöstä $h(t) = 15 + 22t - 4,9t^2$, jossa t on heitosta kulunut aika sekunteina.

a) Määritä pallon nopeus ja kiihtyvyys, kun heitosta on kulunut yksi sekunti.

b) Alas tullessaan pallo ohittaa täpärästi katon ja putoaa maahan. Kuinka kauan pallo oli ilmassa?

Vihje: Koska derivaatta kuvaa muutosnopeutta, niin liikeyhtälön derivaatta kuvaa nopeutta. Tällöin nopeuden derivaatta kiihtyvyyttä.

Vastaus:

a) $v = 12,2 \text{ m/s}$, $a = -9,8 \text{ m/s}^2$

b) $t = 5,091 \text{ s}$

Ratkaisu:

- a) Nopeus saadaan derivoimalla liikeyhtälö ja sijoittamalla
- $t = 1$
- :

$$h' = 22 - 9,8t$$

$$h'(1) = 22 - 9,8 = 12,2$$

$$\Rightarrow v = 12,2 \text{ m/s}$$

Kiihtyvyys saadaan derivoimalla nopeusyhtälö:

$$h'' = -9,8$$

$$\Rightarrow a = -9,8 \text{ m/s}^2$$

- b) Aika, jonka pallo oli ilmassa, on liikeyhtälön nollakohta:

$$h(t) = 15 + 22t - 4,9t^2 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{-22 \pm \sqrt{(-22)^2 - 4 \cdot 15 \cdot (-4,9)}}{2 \cdot (-4,9)} = \frac{-22 \pm \sqrt{778}}{-9,8}$$

$$\Leftrightarrow t = 5,091 \text{ (tai } t = -0,601)$$

Pallo oli siis ilmassa noin 5 sekuntia.

26. Määritä funktion $y = -(\cos(x))^2 - \sin(x) + 1\frac{1}{4}$ huipun koordinaatit, kun $0 \leq x \leq 2\pi$.**Vastaus:** Huippu on kohdassa $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{4})$.**Ratkaisu:** Derivoidaan funktio ja etsitään derivaatan nollakohdat. Ääriarvot löytyvät derivaatan nollakohdista ja välin päätepisteistä.

$$y' = -2\cos(x)(-\sin(x)) - \cos(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos(x)\sin(x) - \cos(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(x)(2\sin(x) - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) = 0 \vee 2\sin(x) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

Merkkikaaviosta tarkastelemalla nähdään huipun olevan kohdassa $x = \frac{\pi}{2}$.

$$y(\frac{\pi}{2}) = -(\cos(\frac{\pi}{2}))^2 - \sin(\frac{\pi}{2}) + \frac{5}{4} = 0 - 1 + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}$$

Huipun koordinaatit ovat $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{4})$.**27.** (*) Millä vakion a arvoilla funktio $f(x) = x^3 + ax^2 + x + 2$ on kaikkialla kasvava?**Vihje:**

* Ensimmäisen ja toisen asteen yhtälöt

$$\textbf{Vastaus: } -\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3}$$

Ratkaisu: Funktio $f(x)$ on derivoituva:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 1.$$

Derivaatan nollakohdat ovat:

$$3x^2 + 2ax + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 12}}{6}$$

Jotta funktio olisi kaikkialla kasvava, saa nollakohtia olla korkeintaan yksi. Derivaatan on oltava suurempi kuin nolla. Näin on kun diskriminantti on pienempi tai yhtäsuuri kuin nolla:

$$D = 4a^2 - 12 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3}$$