

Differentiaalilaskenta

1.

- a) Mikä on tangentti? Mikä on sekantti?
- b) Määrittele funktion monotonisuuteen liittyvät käsitteet: kasvava, aidosti kasvava, vähenevä ja aidosti vähenevä. Anna esimerkit.
- c) Selitä, mitä funktion raja-arvolla tarkoitetaan. Anna esimerkki.
- d) Määrittele funktion ääriarvoihin liittyvät käsitteet: globaali ja lokaali maksimi ja minimi. Anna esimerkit.
- e) Mikä on derivaatta? Anna esimerkki.

Vihje:

- * Derivaatta
- * Sekantti ja tangentti
- * Funktion kasvavuus ja vähenevyys
- * Funktion kasvavuus ja vähenevyys; paikalliset ääriarvot
- * Funktion raja-arvon määritelmä
- * Toispuoliset raja-arvot; raja-arvo ∞ ja raja-arvo äärettömyydessä
- * Absoluuttinen maksimi ja minimi
- * Derivaatan määritelmä
- * Derivoituvuus

2. Laske raja-arvo

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} (5 - 2x)$
- b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x-1}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 3} \lg(x^2 + 1) + 3^x$
- d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \sin 2x$

Vihje:

- * Funktioiden standardiraja-arvoja

3. Laske raja-arvo

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2 + x} - \frac{1}{x} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

4. Laske raja-arvo

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x^2 + 2)$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{2x^2 + x + 4}$

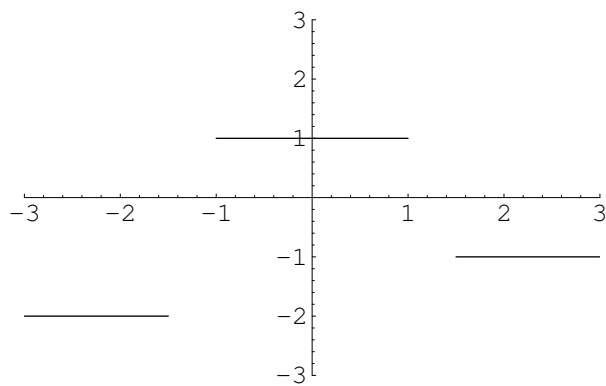
c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{x}$

Vihje:

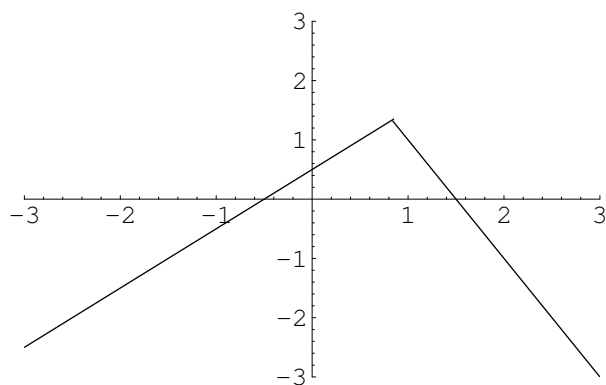
* Reaalilukujoukon välit

5. Pohdi, onko alla olevilla funktioilla derivaatta kaikkialla?

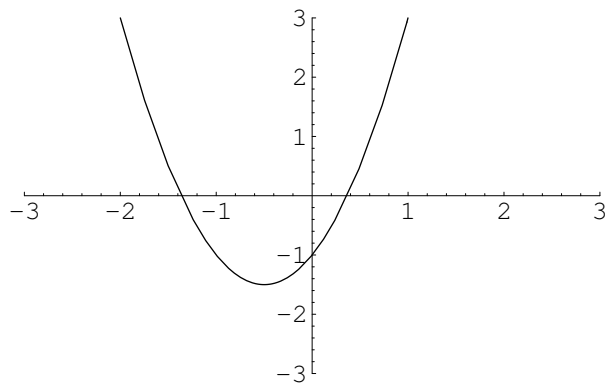
a)



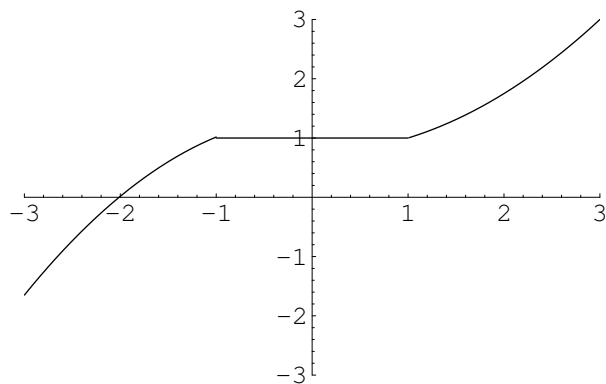
b)



c)



d)



6. Ovatko alla olevat väittämät tosia? Perustele tai anna vastaesimerkki.

- a) Jos $f(x)$ ei ole jatkuva kohdassa x_0 , se ei ole myöskään derivoituva kohdassa x_0 .
- b) Funktiolla on derivaatta kaikkialla, jos se on kasvava.
- c) Jatkuvan funktion suljetulla välillä saamien arvojen joukossa ei välttämättä ole suurinta ja pienintä arvoa.
- d) Jos suljetulla välillä jatkuva funktio saa välin päätepisteissä erimerkkiset arvot, niin funktiolla on ainakin yksi nollakohta tällä välillä.
- e) Jos $f(x)$ on derivoituva kohdassa x_0 , niin se on myös jatkuva kohdassa x_0 .
- f) Funktiolla f on kohdassa x_0 raja-arvona a vain, jos $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$.

7. Derivoi

- a) $f(x) = \pi$

b) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 3$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x^{162} - \frac{1}{2}x^{102} + x + 1$

Vihje:

- * Summan, vakiokerrannaisen, tulon ja osamäärän derivaatta
- * Luettelo derivaatoista
- * Yhdistetyn funktion derivaatta

8. Derivoi

a) $f(x) = (x^3 - 5x)^7$

b) $f(x) = (x^2 - x)(x^3 + 3x)$

c) $f(x) = (2x - 1)^3(3x + 2)^2$

9. Derivoi

a) $f(x) = \sqrt{2x - 1}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{6x^2 + 1}$

c) $f(x) = x\sqrt[3]{6x + 1}$

10. Derivoi

a) $f(x) = \frac{1}{(x^3 + 2x)^2}$

b) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

c) $f(x) = \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^3$

11. Derivoi

a) $f(x) = (\sin(x))^2$

b) $f(x) = (\cos(x))^3$

c) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$

d) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

e) $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

f) $f(x) = x \cdot \sin(x)$

g) $f(x) = \sin(2x) + \cos(3x^2)$

12. Derivoi

a) $f(x) = \ln 2x$

b) $f(x) = (\ln x)^2$

c) $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$

d) $f(x) = \log_2 x$

e) $f(x) = e^{-2x}$

f) $f(x) = xe^x + 2^{x-1}$

13.

a) Laske funktion $f(x) = 2x^2 - 5x + 27$ derivaatta kohdassa $x = 2$.

b) Olkoon $f(x) = (3x - 5)^2$. Ratkaise yhtälö $f'(x) = 4$.

c) Määritä paraabelin $y = x^2 - 4x + 3$ huipun koordinaatit.

14. Määritä paraabelin $y = x^2 - 2x - 1$ pisteeseen $(2, -1)$ piirretyn tangentin yhtälö.

Vihje: Suoran yhtälö $y - y_0 = k(x - x_0)$, kun suoran kulmakerroin on k ja suora kulkee pisteen (x_0, y_0) kautta.

15. Missä pisteessä suoran $y = -2x + 1$ suuntainen tangentti sivuaa käyrää $y = -3x^2 + x$?

16. Missä kulmassa käyrät $y = x^2 - 2x$ ja $y = x^2 - 5x + 6$ leikkaavat toisensa?

Vihje:

* Yhtälöryhmä

17. Osoita, että käyrät $y = x^2$ ja $y = -x^2 + 2x - \frac{1}{2}$ sivuavat toisiaan.

18. Määritä funktion $f : f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$ suurin ja pienin arvo.

Vihje: Funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa joko välin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdissa.

19. Millä x :n arvoilla funktio $f : f(x) = x^5(2x - 3)^4$ on aidosti kasvava?

20. Määritä ne käyrän $y = (x + 1)^4 - 4x$ pisteet, joissa käyrän tangentti on vaakasuora (YO kevät 1992 tehtävä 2).

21. Määritä funktion $f : f(x) = x\sqrt{4 - x}$ ääriarvot.

22. Määritä funktion $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 + 2}$ derivaatan nollakohdat.

Vihje: Huomioi, että murtolausekkeen nimittäjä ei saa olla nolla.

23. (*) Johda derivaatan määritelmän perusteella $f'(-1)$, kun $f(x) = \sqrt{1 - 3x}$.

24. (*) Osoita, että yhtälöllä $x^3 + 3x - 10 = 0$ on täsmälleen yksi reaalijuuri. Määritä sen 2-desimaalinen likiarvo.

Vihje: Osoita ensin, että yhtälöllä on ainakin yksi nollakohta (esimerkiksi Bolzanon lauseen avulla) ja sen jälkeen että sillä on täsmälleen yksi nollakohta (esimerkiksi funktion monotonisuuden avulla).

* Algebran peruslause

* Juuret

25. (*) Pallo heitetään suoraan ylöspäin 15 metriä korkean talon katolta nopeudella 22 m/s. Sen korkeus maan pinnalta metreinä saadaan silloin yhtälöstä $h(t) = 15 + 22t - 4,9t^2$, jossa t on heitosta kulunut aika sekunteina.

a) Määritä pallon nopeus ja kiihtyvyys, kun heitosta on kulunut yksi sekunti.

b) Alas tullessaan pallo ohittaa täpärästi katon ja putoaa maahan. Kuinka kauan pallo oli ilmassa?

Vihje: Koska derivaatta kuvaa muutosnopeutta, niin liikeyhtälön derivaatta kuvaa nopeutta. Tällöin nopeuden derivaatta kiihtyvyyttä.

26. Määritä funktion $y = -(\cos(x))^2 - \sin(x) + 1\frac{1}{4}$ huipun koordinaatit, kun $0 \leq x \leq 2\pi$.

27. (*) Millä vakion a arvoilla funktio $f(x) = x^3 + ax^2 + x + 2$ on kaikkialla kasvava?

Vihje:

* Ensimmäisen ja toisen asteen yhtälöt