

Algebra

1. Ovatko alla olevat väittämät tosia? Perustele tai anna vastaesimerkki.

- a) Luku -2 on luonnollinen luku.
- b) $-2 \in \mathbb{Z}$
- c) Luvut $\frac{5}{6}$ ja $-7\frac{2}{8}$ ovat rationaalilukuja, mutta luvut $\sqrt{2}$ ja π eivät.
- d) $\sin(45^\circ) \in \mathbb{R}$
- e) Kompleksiluvut $\mathbb{C}$ ovat muotoa $z = a + bi$, missä i on imaginääriyksikkö.

Vihje:

- * Reaalilukujoukko
- * Kompleksitaso

Vastaus:

- a) Epätosi
- b) Tosi
- c) Tosi
- d) Tosi
- e) Tosi

Ratkaisu:

- a) Epätosi. Luonnolliset luvut ovat positiivisia kokonaislukuja. Ne eivät siis sisällä negatiivisia lukuja kuten -2 .
- b) Tosi.
- c) Tosi.
- d) Tosi.
- e) Tosi.

2. Laske

- a) $(-2)^3 + (-1)^4 - (-1)^2 + (-3)^2 - (-1)^7$
- b) $(-8)^{-1} - (-2)^{-3} + 3 \cdot (-8)^{-1} + 5 \cdot (-2)^{-3}$

c) $(\frac{1}{2})^5 + 2^{-4} - \frac{1}{2^3} + \frac{2^5}{2^4}$

d) $(2^3)^{-5+5} - 2^{3^2}$

e) $\left((\sqrt{4})^3\right)^2 - \left((\sqrt[3]{2 \cdot 3})^2\right)^6$

f) $2^{2/3}(2^{1/6} \cdot 4^{1/3})^{-1}$

g) $-2\left(-\left(-(-7) - 1/2(\sqrt{2})^2\right)^2\right) + 25^{\frac{1}{2}}$

Mahdolliset ratkaisut:

77, -63, 2, $\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$, -1232, -1, 103, $1\frac{31}{32}$, -511, 3

Vihje:

* Potenssin laskusääntöjä

1) Potenssin määritelmä: $a^n = a \cdot a \cdot a \dots a$

2) Negatiivinen potenssi: $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$, kun $a \neq 0$

3) Samankantaisten potenssin tulo: $a^m a^n = a^{m+n}$

4) Samankantaisten potenssien osamäärä: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

5) Tulon potenssi: $(ab)^n = a^n b^n$

6) Osamäärän potenssi: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

7) Potenssin potenssi: $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$

8) Murtoluku potenssina: $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$

9) $x^0 = 1$, kun $x \in \mathbb{R}$

* Kokonaislukupotenssit

* Juuret

Vastaus:

a) 2

b) -1

c) $1\frac{31}{32}$

d) -511

e) -1232

f) $\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$

g) 77

Ratkaisu:

$$\text{a) } (-2)^3 + (-1)^4 - (-1)^2 + (-3)^2 - (-1)^7 = -8 + 1 - 1 + 9 + 1 = 2$$

$$\text{b) } (-8)^{-1} - (-2)^{-3} + 3 \cdot (-8)^{-1} + 5 \cdot (-2)^{-3} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{3}{8} - \frac{5}{8} = -1$$

$$\text{c) } \left(\frac{1}{2}\right)^5 + 2^{-4} - \frac{1}{2^3} + \frac{2^5}{2^4} = \frac{1}{32} + \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + 2 = 1\frac{1}{32}$$

$$\text{d) } (2^3)^{-5+5} - 2^{3^2} = 2^0 - 2^9 = -511$$

$$\text{e) } \left((\sqrt{4})^3\right)^2 - \left((\sqrt[3]{2 \cdot 3})^2\right)^6 = 4^{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2} - 6^{\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 6} = -1232$$

$$\text{f) } 2^{2/3}(2^{1/6} \cdot 4^{1/3})^{-1} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$$

$$\text{g) } -2\left(-\left(-(-7) - 1/2(\sqrt{2})^2\right)^2\right) + 25^{\frac{1}{2}} = -2\left(-\left(7 - \frac{1}{2} \cdot 2\right)^2\right) + 5 = -2(-6^2) + 5 = 77$$

3. Laske

$$\text{a) } \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right) : \left(\frac{2}{3} \cdot 1\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)$$

$$\text{b) } \frac{-2^3 - (-2^0)^3}{(2^{-1})^{-3} - 2^{-3}}$$

$$\text{c) } \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - \left(-1\frac{1}{2}\right)^{-3}\right] : \left(-4\frac{1}{3}\right)$$

$$\text{d) } |2^{-2} - 5^{-2}| - (-10)^{-2}$$

Mahdollisia ratkaisuja: $\frac{7}{5}, -\frac{8}{7}, 0, \frac{1}{5}, -\frac{8}{9}, -\frac{3}{13}, \frac{11}{50}$

Vihje:

$$\text{a) } \frac{p}{q} : \frac{s}{t} = \frac{p}{q} \cdot \frac{t}{s} \text{ kun } p, q, s, t \in \mathbb{Z} \text{ ja } q, t, s \neq 0$$

$$\text{d) } |x| = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0, x \in \mathbb{R} \\ -x, & \text{kun } x < 0 \end{cases}$$

Vastaus:

$$\text{a) } \frac{7}{5}$$

$$\text{b) } -\frac{8}{9}$$

$$\text{c) } 0$$

$$\text{d) } \frac{1}{5}$$

Ratkaisu:

- a) $(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4}) : (\frac{2}{3} \cdot 1\frac{3}{4} - \frac{3}{4}) = \frac{7}{12} : \frac{5}{12} = \frac{7}{12} \cdot \frac{12}{5} = \frac{7}{5}$
- b) $\frac{-2^3 - (-2^0)^3}{(2^{-1})^{-3} - 2^{-3}} = \frac{-8+1}{8-\frac{1}{8}} = -\frac{8}{9}$
- c) $[(-\frac{2}{3})^3 - (-1\frac{1}{2})^{-3}] : (-4\frac{1}{3}) = (-\frac{8}{27} + \frac{1}{\frac{27}{8}}) : (-4\frac{1}{3}) = 0$
- d) $|2^{-2} - 5^{-2}| - (-10)^{-2} = |\frac{1}{4} - \frac{1}{25}| - \frac{1}{100} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

4. Jaa polynomi tekijöihin

- a) $x^2 - 4$
- b) $x^2 - 1$
- c) $25x^2 - 36y^2$
- d) $2x^4 - 32$
- e) $\frac{(2a-b)(a+2b)-3ab}{a+b}$

Vihje:

- * $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
- * Polynomien alkeellinen tekijöihin jako

Vastaus:

- a) $(x-2)(x+2)$
- b) $(x-1)(x+1)$
- c) $(5x-6y)(5x+6y)$
- d) $2(x-2)(x+2)^3$
- e) $2(a-b)$

Ratkaisu:

- a) $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$
- b) $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$
- c) $25x^2 - 36y^2 = (5x-6y)(5x+6y)$
- d) $2x^4 - 32$
 $= 2(x^4 + 16)$
 $= 2(x^2 - 4)(x^2 + 4)$
 $= 2(x-2)(x+2)(x+2)(x+2)$
 $= 2(x-2)(x+2)^3$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } & \frac{(2a-b)(a+2b)-3ab}{a+b} \\
 &= \frac{2a^2+4ab-ab-2b^2-3ab}{a+b} \\
 &= \frac{2a^2-2b^2}{a+b} \\
 &= \frac{2(a^2-b^2)}{a+b} \\
 &= \frac{2(a-b)(a+b)}{a+b} \\
 &= 2(a-b)
 \end{aligned}$$

5. Sievennä lauseke

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \frac{x^2+6x+9}{x^2-2x+1} \\
 \text{b) } & \frac{4x^2-12x+9}{4x^3-4x^2+x} \\
 \text{c) } & \frac{-a^2+2a-1}{2a^2-a^4-1}
 \end{aligned}$$

Vihje:

$$* \quad a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Vastaus:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \frac{(x+3)^2}{(x-1)^2} \\
 \text{b) } & \frac{(2x-3)^2}{x(2x-1)^2} \\
 \text{c) } & \frac{1}{(a+1)^2}
 \end{aligned}$$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \frac{x^2+6x+9}{x^2-2x+1} = \frac{(x+3)^2}{(x-1)^2} \\
 \text{b) } & \frac{4x^2-12x+9}{4x^3-4x^2+x} = \frac{(2x-3)^2}{x(2x-1)^2} \\
 \text{c) } & \frac{-a^2+2a-1}{2a^2-a^4-1} \\
 &= \frac{-(a-1)^2}{-(a^4-2a^2+1)} \\
 &= \frac{-(a-1)^2}{-(a^2-1)^2} \\
 &= \frac{-(a-1)^2}{-(a+1)^2(a-1)^2} \\
 &= \frac{1}{(a+1)^2}
 \end{aligned}$$

6. Jaa polynomi tekijöihin

a) $x^3 - 3x^2 + 2x - 6$

b) $a^2 - ab - a + b$

Vihje:

* Jäsenten sopiva ryhmittely

Vastaus:

a) $(x-3)(x^2+2)$

b) $(a-b)(a-1)$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} \text{a) } x^3 - 3x^2 + 2x - 6 &= (x^3 - 3x^2) + (2x - 6) \\ &= x^2(x-3) + 2(x-3) \\ &= (x-3)(x^2+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } a^2 - ab - a + b &= (a^2 - ab) + (-a + b) \\ &= a(a-b) - (a-b) \\ &= (a-b)(a-1) \end{aligned}$$

7. Sievennä

a) $\frac{3x^2-6}{x^2+x} - \frac{3}{x+1}$

b) $\log_4 \frac{5}{3} - \ln \frac{2}{7} + \log_4 \frac{3}{5} + \ln 7^2 + \ln(2 \cdot 7)$

c) $\log_{21} 21^4 - \log_{52} 52 + \log_{700} 700^{50} + \log_{18} 1 - 72^{\log_{72} 68}$

d) $|x-2| + |x+1| - (x+3)$

e) $\sqrt{x^2+4x+4} - \sqrt{x^2}$

Vihje:

a) Tekijöihin jako: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n)$

$$\begin{aligned} \text{b) } \log xy &= \log x + \log y, \\ \log \frac{x}{y} &= \log x - \log y, \\ \log x^r &= r \log x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \log_a 1 &= 0, \\ \log_a a &= 1, \\ \log_a a^x &= x, \\ a^{\log_a x} &= x \end{aligned}$$

d) Tarkastele lausekkeen arvoa eri väleillä.

$$\text{e) } \sqrt{x^2} = |x|$$

* Tekijöihin jako polynomin nollakohtien avulla

* Logaritmifunktion määrittely

Vastaus:

$$\text{a) } \frac{3(x-2)}{x}$$

$$\text{b) } 4 \ln 7$$

$$\text{c) } -15$$

$$\text{d) } \begin{cases} -3x - 2, & \text{kun } x \leq -1 \\ -x, & \text{kun } -1 < x < 2 \\ x - 4, & \text{kun } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} -2, & \text{kun } x \leq -2 \\ 2x + 2, & \text{kun } -2 < x < 0 \\ 2, & \text{kun } x \geq 0 \end{cases}$$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{3x^2-6}{x^2+x} - \frac{3}{x+1} \\ &= \frac{3x^2-6}{x(x+1)} - \frac{3}{x+1} \\ &= \frac{3x^2-6-3x}{x(x+1)} \\ &= \frac{3(x+1)(x-2)}{x(x+1)} \\ &= \frac{3(x-2)}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & \log_4 \frac{5}{3} - \ln \frac{2}{7} + \log_4 \frac{3}{5} + \ln 7^2 + \ln(2 \cdot 7) \\ &= \log_4 5 - \log_4 3 - (\ln 2 - \ln 7) + \log_4 3 - \log_4 5 + 2 \cdot \ln 7 + \ln 2 + \ln 7 \\ &= -\ln 2 + \ln 7 + 2 \cdot \ln 7 + \ln 2 + \ln 7 \\ &= 4 \cdot \ln 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & \log_{21} 21^4 - \log_{52} 52 + \log_{700} 700^{50} + \log_{18} 1 - 72^{\log_{72} 68} \\ &= 4 - 1 + 50 + 0 - 68 = -15 \end{aligned}$$

d) Ratkaistaan lauseke $|x-2| + |x+1| - (x+3)$

väleillä

$$x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ja } x+1=0 \Leftrightarrow x=-1.$$

Lauseke saa arvon

$$-x+2-x-1-x-3=-3x-2, \text{ kun } x \leq -1,$$

arvon

$$-x+2+x+1-x-3=-x, \text{ kun } -1 < x < 2$$

ja arvon

$$x-2+x+1-x-3=x-4, \text{ kun } x \geq 2.$$

Siis

$$|x-2| + |x+1| - (x+3) = \begin{cases} -3x-2, & \text{kun } x \leq -1 \\ -x, & \text{kun } -1 < x < 2 \\ x-4, & \text{kun } x \geq 2 \end{cases}.$$

e) Ratkaistaan lauseke $\sqrt{x^2+4x+4} - \sqrt{x^2} = \sqrt{(x+2)^2} - \sqrt{x^2} = |x+2| - |x|$ väleillä

$$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2 \text{ ja } x=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Lauseke saa arvon

$$-x-2+x=-2, \text{ kun } x \leq -2,$$

arvon

$$x+2+x=2x+2, \text{ kun } -2 < x < 0$$

ja arvon

$$x+2-x=2, \text{ kun } x \geq 0.$$

Siis

$$\sqrt{x^2+4x+4} - \sqrt{x^2} = \begin{cases} -2, & \text{kun } x \leq -2 \\ 2x+2, & \text{kun } -2 < x < 0 \\ 2, & \text{kun } x \geq 0 \end{cases}.$$

8. Millä x :n reaalisilla arvoilla lauseke

a) $\frac{2x-1}{2x+1}$

b) $\frac{2x-1}{x^2+1}$

c) $\frac{2x+1}{-2x+\sqrt{25x^4-9x^2}}$

d) $\log(x^2\sqrt{x-1})$

on määritelty?

Vihje:

* Murtoluku on muotoa $\frac{p}{q}$, jossa $q \neq 0$.

* Neliöjuurilausekkeen reaalisuusehto: $\sqrt{a} \in \mathbb{R}$, kun $a \geq 0$.

* Logaritmin määritelmä: $\log_a x$, kun $a > 0, a \neq 1$ ja $x > 0$.

Vastaus:

- a) Lauseke $\frac{2x-1}{2x+1}$ on määritelty, kun $x \neq \frac{1}{2}$.
- b) Lauseke $\frac{2x-1}{x^2+1}$ on määritelty on kaikilla x :n arvoilla.
- c) Lauseke $\frac{2x+1}{-2x+\sqrt{25x^4-9x^2}}$ on määritelty, kun $x \neq \frac{1}{4}$.
- d) Lauseke $\log(x^2\sqrt{x-1})$ on määritelty, kun $x > 1$.

Ratkaisu:

- a) Lauseke $\frac{2x-1}{2x+1}$ on määritelty, kun nimittäjä $2x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$.
- b) Lauseke $\frac{2x-1}{x^2+1}$ on määritelty, kun nimittäjä $x^2+1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq -1$. Koska toinen potenssi ei voi olla negatiivinen, lauseke on määritelty kaikilla x :n arvoilla.
- c) Lauseke $\frac{2x+1}{-2x+\sqrt{25x^4-9x^2}}$ on määritelty, kun nimittäjä
$$\begin{aligned} -3x^2 + \sqrt{9x^4 + 4x - 1} &\neq 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{9x^4 + 4x - 1} &\neq 0 \\ \Leftrightarrow 9x^4 + 4x - 1 &\neq 9x^4 \\ \Leftrightarrow x &\neq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$
- d) Lauseke $\log(x^2\sqrt{x-1})$ on määritelty, kun $x^2\sqrt{x-1} > 0$.
Tällöin on oltava
 $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ ja $x^2 > 0 \Leftrightarrow x > 0$.
Lauseke on siis määritelty, kun $x > 1$.

9. Ratkaise ensimmäisen asteen yhtälö

- a) $x - 2(x - 3) = x - 4(x + 3)$
- b) $(x + 1)^2 - x^2 = 2(x + 1)$
- c) $x(x + 1) - (x - 1) = x^2 + 1$
- d) $x^2 - 3(x - 4) = (x + 3)^2$

Vihje:

* Ensimmäisen ja toisen asteen yhtälöt

Vastaus:

- a) $x = -9$

- b) Ei ratkaisua.
- c) Kaikki reaaliset luvut ovat ratkaisuja.
- d) $x = \frac{1}{3}$

Ratkaisu:

- a) $x - 2(x - 3) = x - 4(x + 3)$
 $\Leftrightarrow x - 2x - 6 = x - 4x - 12$
 $\Leftrightarrow 2x = -18$
 $\Leftrightarrow x = -9$
- b) $(x + 1)^2 - x^2 = 2(x + 1)$
 $\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 2$
 $\Leftrightarrow 0 = 1$
 Yhtälöllä ei ole ratkaisua.
- c) $x(x + 1) - (x - 1) = x^2 + 1$
 $\Leftrightarrow x^2 + x - x + 1 = x^2 + 1$
 $\Leftrightarrow x^2 = x^2$
 $\Leftrightarrow 0 = 0$
 Kaikki reaaliset luvut ovat ovat yhtälön ratkaisuja.
- d) $x^2 - 3(x - 4) = (x + 3)^2$
 $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 12 = x^2 + 6x + 9$
 $\Leftrightarrow -9x = -3$
 $\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

10. Ratkaise ensimmäisen asteen yhtälö

- a) $\frac{3x+1}{2} - \frac{x-5}{4} = 2x + 1$
- b) $\frac{8x+9}{10} - \frac{7x-6}{25} = \frac{3x+6}{5} - \frac{x+3}{20}$
- c) Ratkaise a :n ja b :n suhteen yhtälö $\frac{a-b}{bt} = \frac{3}{5}$ kun $a, b, t > 0$.
- d) Ratkaise x :n suhteen yhtälö $ax - a = 2x$.

Vihje:

- d) Muuttuja a on parametri, jonka vaikutus tehtävän ratkaisuun on otettava huomioon.

Vastaus:

- a) $x = 1$
- b) $x = 3$

c) Muuttujan a suhteen $a = \frac{3bt+5b}{5}$ ja muuttujan b suhteen $b = \frac{5a}{3t+5}$.

d) $x = \frac{a}{a-2}$, kun $a \neq 2$. Yhtälöllä ei ole ratkaisua, jos $a = 2$.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{3x+1}{2} - \frac{x-5}{4} &= 2x+1 \\ \Leftrightarrow \frac{2(3x+1)-x+5}{4} &= 2x+1 \\ \Leftrightarrow 6x+2-x+5 &= 8x+4 \\ \Leftrightarrow x &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{8x+9}{10} - \frac{7x-6}{25} &= \frac{3x+6}{5} - \frac{x+3}{20} \\ \Leftrightarrow \frac{80x+90-28x+24}{100} &= \frac{60x+120-5x-15}{100} \\ \Leftrightarrow x &= 3 \end{aligned}$$

c) Muuttujan a suhteen yhtälön ratkaisu on

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{bt} &= \frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow 5a-5b &= 3bt \\ \Leftrightarrow a &= \frac{3bt+5b}{5} \end{aligned}$$

ja muuttujan b suhteen

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{bt} &= \frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow 3bt &= 5a-5b \\ \Leftrightarrow b(3t+5) &= 5a \\ \Leftrightarrow b &= \frac{5a}{3t+5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } ax-a &= 2x \\ \Leftrightarrow x(a-2) &= a \\ \Leftrightarrow x &= \frac{a}{a-2}, \text{ kun } a-2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 2. \\ \text{Jos } ax-2 &= 2x \Leftrightarrow 0=2, \text{ yhtälöllä ei ole ratkaisua.} \end{aligned}$$

11. Ratkaise toisen asteen yhtälö

$$\text{a) } 2x^2 - 18 = 0$$

$$\text{b) } (2x+1)^2 = 5$$

$$\text{c) } 2x^2 - x = 3x$$

$$\text{d) } (x-1)(2x+1) = 0$$

Mahdollisia ratkaisuja:

$$\begin{aligned} x = -3, x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, x = -1, x = -\frac{4}{5}, x = -\frac{1}{2}, x = 0, x = \sqrt{2}, x = \frac{8-2\sqrt{7}}{3}, x = \frac{1}{2}, \\ x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, x = 1, x = 2, x = 3, x = \frac{8+2\sqrt{7}}{3}, x = \frac{-1-\sqrt{1+a}}{a}, x = \frac{-1+\sqrt{1+a}}{a}, x = \frac{-1-\sqrt{1-a}}{a}, \\ x = \frac{-1+\sqrt{1-a}}{a}, \text{ yhtälöllä ei ole ratkaisua, kaikki reaaliset luvut ovat yhtälön ratkaisuja.} \end{aligned}$$

Vastaus:

$$\text{a) } x = \pm 3$$

$$\text{b) } x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{c) } x = 0 \text{ tai } x = 2$$

$$\text{d) } x = 1 \text{ tai } x = -\frac{1}{2}$$

Ratkaisu:

$$\text{a) } 2x^2 - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 3$$

$$\text{b) } (2x + 1)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = \pm \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{c) } 2x^2 - x = 3x$$

$$\Leftrightarrow 2x(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0 \text{ tai } x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ tai } x = 2$$

$$\text{d) } (x - 1)(2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ tai } 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ tai } x = -\frac{1}{2}$$

12. Ratkaise toisen asteen yhtälö

$$\text{a) } (x - 5)(1 - 3x) = 7$$

$$\text{b) } x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$\text{c) } \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{5}x - \frac{4}{15} = 0$$

$$\text{d) } x^2 - 2x - \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} = 0$$

$$\text{e) Ratkaise } x\text{:n suhteen yhtälö } ax^2 + 2x - 1 = 0.$$

Mahdollisia ratkaisuja:

$$x = -3, x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, x = -1, x = -\frac{4}{5}, x = -\frac{1}{2}, x = 0, x = \sqrt{2}, x = \frac{8 - 2\sqrt{7}}{3}, x = \frac{1}{2},$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, x = 1, x = 2, x = 3, x = \frac{8 + 2\sqrt{7}}{3}, x = \frac{-1 - \sqrt{1+a}}{a}, x = \frac{-1 + \sqrt{1+a}}{a}, x = \frac{-1 - \sqrt{1-a}}{a},$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{1-a}}{a}, x = -\frac{1}{a}, \text{ yhtälöllä ei ole ratkaisua, kaikki reaaliset luvut ovat yhtälön ratkaisuja.}$$

Vihje:

e) Muuttuja a on parametri, jonka vaikutus tehtävän ratkaisuun on otettava huomioon.

Toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ diskriminantti $D = b^2 - 4ac$ säätelee juurien lukumäärää:

1) Jos $D > 0$, yhtälöllä on kaksi ratkaisua.

2) Jos $D = 0$, yhtälöllä on yksi ratkaisu.

3) Jos $D < 0$, yhtälöllä ei ole yhtään ratkaisua.

Vastaus:

a) $x = \frac{8 \pm 2\sqrt{7}}{3}$

b) Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

c) $x_1 = \frac{1}{2}$ ja $x_2 = -\frac{4}{5}$

d) $x_1 = 2$ ja $x_2 = \sqrt{2}$

e) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+a}}{a}$, jos $a > -1$, $a \neq 0$
 $x = -\frac{1}{a}$, jos $a = -1$

Yhtälöllä ei ole ratkaisua, jos $a < -1$.

Jos $a = 0$, niin $x = \frac{1}{2}$.

Ratkaisu:

a) $(x-5)(1-3x) = 7$
 $\Leftrightarrow -3x^2 + 16x - 12 = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 4 \cdot (-3) \cdot (-12)}}{-6}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-16 \pm \sqrt{112}}{-6}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-16 \pm 4\sqrt{7}}{-6}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{8 \pm 2\sqrt{7}}{3}$
 $\Leftrightarrow x_1 = \frac{8+2\sqrt{7}}{3} \approx 4,431$, $x_2 = \frac{8-2\sqrt{7}}{3} \approx 0,903$

b) $x^2 + 3x + 4 = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2}$
Yhtälöllä ei ole reaalista ratkaisua.

c) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{5}x - \frac{4}{15} = 0$
 $\Leftrightarrow 10x^2 + 3x - 4 = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{20}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 13}{20}$
 $\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{4}{5}$

d) $x^2 - 2x - \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 + x(-\sqrt{2} - 2) + 2\sqrt{2} = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{2 + \sqrt{2} \pm \sqrt{(2 + \sqrt{2})^2 - 4 \cdot 2\sqrt{2}}}{2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{2 + \sqrt{2} \pm \sqrt{4 + 4\sqrt{2} + 2 - 8\sqrt{2}}}{2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{2 + \sqrt{2} \pm \sqrt{(2 - \sqrt{2})^2}}{2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{2 + \sqrt{2} \pm (2 - \sqrt{2})}{2}$
 $\Leftrightarrow x_1 = 2$ tai $x_2 = \sqrt{2}$

- e) Yhtälön $ax^2 + 2x - 1 = 0$ ratkaisut ovat
 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+a}}{a}$,
 jos diskriminantti $D = 1 + a > 0 \Leftrightarrow a > -1$ ja $a \neq 0$.
 Yhtälön ratkaisu on
 $x = -\frac{1}{a}$,
 jos diskriminantti $D = 1 + a = 0 \Leftrightarrow a = -1$.
 Yhtälöllä ei ole ratkaisua, jos diskriminantti
 $D = 1 + a < 0 \Leftrightarrow a < -1$.
 Toisaalta jos $a = 0$, niin $ax^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

13. Ratkaise yhtälö

- a) $(x+3)(x^2+x-6) = 0$
 b) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$
 c) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

Vihje:

- c) Bikvadraattinen yhtälö. Merkitään $x^2 = u$.

Vastaus:

- a) $x = -3$ tai $x = 2$
 b) $x = 3$ tai $x = \pm 1$
 c) $x = \pm\sqrt{2}$ tai $x = \pm 1$

Ratkaisu:

- a) $(x+3)(x^2+x-6) = 0$
 $\Leftrightarrow x+3 = 0$ tai $x^2+x-6 = 0$
 $\Leftrightarrow x = -3$ tai $x = \frac{-1 \pm 5}{2}$
 $\Leftrightarrow x = -3, x = 2$ tai $x = -3$
- b) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$
 $\Leftrightarrow (x^3 - 3x^2) + (-x + 3) = 0$
 $\Leftrightarrow x^2(x-3) - (x-3) = 0$
 $\Leftrightarrow (x-3)(x^2-1) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 3$ tai $x = \pm 1$
- c) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$
 $\Leftrightarrow (x^2)^2 - 3x^2 + 2 = 0$
 Bikvadraattinen yhtälö. Merkitään $x^2 = u$.
 $u^2 - 3u + 2 = 0$
 $\Leftrightarrow u = \frac{3 \pm 1}{2}$
 $\Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ tai $x = \pm 1$

14. Ratkaise ensimmäisen asteen epäyhtälö

a) $2(x + \sqrt{5}) < \sqrt{5}(x + 2)$

b) $x - 3(x + 1) \leq 2(1 - x)$

c) $\frac{1-x}{x+2} \geq 0$

d) $\frac{x}{x+1} \leq \frac{1}{2-x}$

e) $\frac{4}{x} > x$

f) Ratkaise x :n suhteen epäyhtälö $ax \leq 1 - 2x$.

Vihje:

* Epäyhtälö

Vastaus:

a) $x > 0$

b) Epäyhtälö toteutuu kaikilla x :n arvoilla.

c) $-2 < x \leq 1$

d) $-1 < x < 2$

e) $x < -2$ tai $0 < x < 2$

f) $x \leq \frac{1}{a+2}$, kun $a > -2$ ja

$x \geq \frac{1}{a+2}$, kun $a < -2$.

Jos $a = -2$, epäyhtälö toteutuu kaikilla x :n arvoilla.

Ratkaisu:

a) $2(x + \sqrt{5}) < \sqrt{5}(x + 2)$
 $\Leftrightarrow 2x + 2\sqrt{5} < \sqrt{5}x + 2\sqrt{5}$
 $\Leftrightarrow 2x - \sqrt{5}x < 0$
 $\Leftrightarrow x(2 - \sqrt{5}) < 0$
 $\Leftrightarrow x > 0$

b) $x - 3(x + 1) \leq 2(1 - x)$
 $\Leftrightarrow x - 3x - 3 \leq 2 - 2x$
 $\Leftrightarrow 0 \leq 5$
 $\Rightarrow$ Epäyhtälö toteutuu kaikilla x :n arvoilla.

c) Epäyhtälön $\frac{1-x}{x+2} \geq 0$ nollakohta on $1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Lisäksi $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$ Epäyhtälö toteutuu, kun molemmat ehdot toteutuvat eli, kun $-2 < x \leq 1$.

d) Epäyhtälö $\frac{x}{x+1} \leq \frac{1}{2-x}$ on reallinen, kun

$$x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \text{ ja}$$

$$2-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2.$$

$$\frac{x}{x+1} \leq \frac{1}{2-x}$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Koska yhtälöllä ei ole reaalisia juuria, epäyhtälö toteutuu, kun $-1 < x < 2$.

e) Epäyhtälö $\frac{4}{x} > x$ on reallinen, kun $x \neq 0$.

$$\frac{4}{x} > x$$

$$\Rightarrow x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 2$$

Yhtälön juurien ja epäyhtälön osamäärän reaalisuusehdon vuoksi epäyhtälö toteutuu arvoilla $x < -2$ tai $0 < x < 2$.

f) $ax \leq 1 - 2x$

$$\Leftrightarrow x(a+2) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{a+2}, \text{ jos } a > -2$$

Lisäksi

$$x \geq \frac{1}{a+2}, \text{ jos } a < -2.$$

Jos $a = 2$, niin epäyhtälö toteutuu kaikilla x :n arvoilla.

15. Ratkaise toisen asteen epäyhtälö

a) $x^2 + 2x - 8 > 0$

b) $x(5-x) \geq 6$

c) $x^2 \geq 5$

d) $-x^2 + 4x \leq 5$

e) $x^2 - 4x + 4 \geq 0$

Vastaus:

a) $x < -4$ tai $x > 2$

b) $2 \leq x \leq 3$

c) $x \leq -\sqrt{5}$ tai $x \geq \sqrt{5}$

d) Kaikki (reaali)luvut ovat epäyhtälön ratkaisuja.

e) Kaikki (reaali)luvut ovat epäyhtälön ratkaisuja.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} \text{a) } x^2 + 2x - 8 &> 0 \\ \Rightarrow x^2 + 2x - 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} \\ \Rightarrow x &< -4 \text{ tai } x > 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x(5-x) &\geq 6 \\ \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 &\geq 0 \\ \Rightarrow x^2 - 5x + 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{5 \pm 1}{2} \\ \Leftrightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = 3 &\Rightarrow 2 \leq x \leq 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } x^2 &\geq 5 \\ \Leftrightarrow x &\geq \pm\sqrt{5} \\ \Rightarrow x &\leq -\sqrt{5} \text{ tai } x \geq \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } -x^2 + 4x &\leq 5 \\ \Rightarrow -x^2 + 4x &= 5 \\ \text{Yhtälöllä ei ole reaalisia juuria, joten epäyhtälö toteutuu kaikilla reaaliluvuilla.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } x^2 - 4x + 4 &\geq 0 \\ \Rightarrow x &= \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} \\ \text{Yhtälö saa positiivisia arvoja kaikkialla, joten kaikki reaaliluvut ovat epäyhtälön ratkaisuja.} \end{aligned}$$

16.

- a) Ratkaise toisen asteen epäyhtälö $x + 4 \leq \frac{5}{x}$
- b) Millä x :n arvoilla lauseke $\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \sqrt{x^2 - x - 2}$ on reaalinen?
- c) Millä a :n arvoilla yhtälön $x^2 - 2ax + 3 = 0$ juuret ovat reaaliset?

Vihje:

- b) Määritelmän mukaan neliöjuurilauseke $\sqrt{a} \in \mathbb{R}$, kun $a \geq 0$. Lisäksi rationaaliluku $\frac{p}{q} \in \mathbb{R}$, kun $q \neq 0$.

Vastaus:

- a) $x \leq -5$ tai $0 < x \leq 1$
- b) $-2 < x \leq 1$ tai $x \geq 2$
- c) $x \leq -\sqrt{3}$ tai $x \geq \sqrt{3}$

Ratkaisu:

- a) Epäyhtälön $x + 4 \leq \frac{5}{x}$ nolakohdat ovat $x_1 = 1$ ja $x_2 = -5$. Lisäksi $x \neq 0$, joten epäyhtälö toteutuu, kun $x \leq -5$ tai $0 < x \leq 1$.

b) Lauseke $\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \sqrt{x^2 - x - 2}$ on reaalinen, kun osamäärän nimittäjä on positiivinen ja neliöjuuri on suurempi tai yhtäsuuri kuin nolla.

$$x + 2 > 0 \text{ ja } x^2 - x - 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x > -2 \text{ ja } x = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$\Rightarrow -2 < x \leq 1 \text{ tai } x \geq 2$$

c) Yhtälön $x^2 - 2ax + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 12}}{2}$ juuret ovat reaaliset, kun ratkaisukaavan diskriminantti $D = 4a^2 - 12$ on suurempi tai yhtä suuri kuin nolla

$$4a^2 - 12 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq \pm\sqrt{3} \Rightarrow x \leq -\sqrt{3} \text{ tai } x \geq \sqrt{3}.$$

17. Ratkaise yhtälö

a) $|x - 1| = 3$

b) $|x + 7| = |3x + 5|$

c) $|x - 2| = -5$

d) $|2x + 5| = x - 7$

Vihje:

* Reaaliluvun itseisarvo

* Itseisarvoyhtälön ratkaiseminen

Vastaus:

a) $x_1 = 4$ ja $x_2 = -2$

b) $x_1 = 1$ ja $x_2 = -3$

c) Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

d) Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Ratkaisu:

a) $|x - 1| = 3$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 3 \text{ ja } -x + 1 = 3$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 4 \text{ ja } x_2 = -2$$

b) $|x + 7| = |3x + 5|$

$$\Leftrightarrow x + 7 = 3x + 5 \text{ ja } -x - 7 = 3x + 5$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ ja } x_2 = -3$$

c) Yhtälön $|x - 2| = -5$ toinen puoli on positiivinen ja toinen negatiivinen, joten yhtälöllä ei ole ratkaisua.

- d) $|2x + 5| = x - 7$
 $\Leftrightarrow 2x + 5 = x - 7$ ja $-2x - 5 = x - 7$
 $\Leftrightarrow x = -12$ ja $x = \frac{2}{3}$
 $\Rightarrow$ Yhtälön oikea puoli on positiivinen, kun $x - 7 > 0$. Yhtälön ratkaisuihin $x = -12$ ja $x = \frac{2}{3}$ kumpikaan ei toteuta ehtoa, joten yhtälöllä ei ole ratkaisua.

18. Ratkaise yhtälö

- a) $x^2 - 6 = |5x|$
b) $|2 + |x - 1|| = 3$
c) $|x - 1| + |x + 4| - (x - 1) = 2$

Vastaus:

- a) $x = \pm 6$
b) $x = 2$ ja $x = 0$
c) Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Ratkaisu:

- a) Ratkaistaan yhtälö.
 $x^2 - 6 = |5x|$
 $\Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$ ja $x^2 + 5x - 6 = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 7}{2}$ ja $x = \frac{-5 \pm 7}{2}$
 $\Leftrightarrow x_1 = 6, x_2 = -1, x_3 = 1$ ja $x_4 = -6$

Yhtälön vasen puoli on positiivinen, kun $x^2 - 6 > 0 \Leftrightarrow x > \pm \sqrt{6}$. Yhtälön ratkaisuihin $x_2 = -1$ ja $x_3 = 1$ eivät toteuta ehtoa, joten yhtälö toteutuu, kun $x = \pm 6$.

- b) Ratkaistaan yhtälö.
 $|2 + |x - 1|| = 3$
 $\Leftrightarrow 2 + |x - 1| = 3$ ja $2 - |x - 1| = 3$
 $\Leftrightarrow x - 1 = 1$ ja $-x + 1 = 1$ ja $|x - 1| = -5$
 $\Leftrightarrow x = 2$ ja $x = 0$ ja $|x - 1| = -5$

Ratkaisuksi saatu itseisarvoyhtälö $|x - 1| = -5$ on mahdoton, joten yhtälö toteutuu, kun $x = 2$ ja $x = 0$.

- c) Tarkastellaan yhtälön $|x - 1| + |x + 4| - (x - 1) = 2$ ratkaisua erikseen väleillä $x < -4$, $-4 < x < 1$ ja $x > 1$. Koska yhtälö ei toteudu millään arvoilla x , yhtälöllä ei ole ratkaisua.

19. Ratkaise itseisarvoepäyhtälö

- a) $|3 - 2x| < 5$
- b) $|x - 1| > 2$
- c) $|2x - 1| > 3x$
- d) $|x| + |x - 2| \leq x + 1$

Vastaus:

- a) $-1 < x < 4$
- b) $x < -1$ tai $x > 3$
- c) $x < \frac{1}{5}$
- d) $1 \leq x \leq 3$

Ratkaisu:

- a) Yhtälö $|3 - 2x| < 5$ voidaan ratkaista useammalla eri tavalla. Tässä esitellään kolme eri-
laista tapaa.

1. tapa:

$$\begin{aligned}
 &|3 - 2x| < 5 \\
 &\Leftrightarrow 3 - 2x < 5 \text{ ja } -3 + 2x < 5 \\
 &\Leftrightarrow x > -1 \text{ ja } x < 4 \\
 &\Rightarrow -1 < x < 4
 \end{aligned}$$

2. tapa:

$$\begin{aligned}
 &|3 - 2x| < 5 \\
 &\Leftrightarrow -5 < 3 - 2x < 5 \\
 &\Leftrightarrow -5 - 3 < -2x < 5 - 3 \\
 &\Leftrightarrow 4 > x > -1
 \end{aligned}$$

3. tapa:

Toisen potenssin käyttö epäyhtälön sievennystoimenpiteenä on luvallinen vain silloin, kun epäyhtälön molemmat puolet ovat positiivisia (pienempi puoli voi olla nolla).

$$\begin{aligned}
 &|3 - 2x| < 5 \\
 &\Leftrightarrow (x - 1)^2 > (2)^2 \\
 &\Leftrightarrow 4x^2 - 12x - 16 < 0 \\
 &\Leftrightarrow -1 < x < 4
 \end{aligned}$$

- b) $|x - 1| > 2$
 $\Leftrightarrow x - 1 > 2$ tai $-x + 1 > 2$
 $\Leftrightarrow x > 3$ tai $x > -1$
- c) $|2x - 1| > 3x$
 $\Leftrightarrow 2x - 1 > 3x$ tai $-2x + 1 > 3x$
 $\Leftrightarrow x < -1$ tai $x < \frac{1}{5}$
 $\Rightarrow x < \frac{1}{5}$

- d) Ratkaistaan yhtälö $|x| + |x - 2| \leq x + 1$ alueilla $x \leq 0$, $0 < x < 2$ ja $x \geq 2$.
 Kun $x \leq 0$, yhtälö ei toteudu.
 Kun $0 < x < 2$, yhtälö toteutuu arvoilla $x \geq 1$.
 Kun $x \geq 2$, yhtälö toteutuu arvoilla $x \leq 3$.
 Siten koko itseisarvoyhtälö toteutuu arvoilla $1 \leq x \leq 3$.

20.

- a) Ratkaise itseisarvoepäyhtälö $|\frac{2x+1}{3x-1} - \frac{2}{3}| < 0,01$ (YO kevät -90, tehtävä 6a)
 b) Ratkaise itseisarvoepäyhtälö $|\frac{1}{x} - 1| < k$, kun $0 < k < 1$ (YO syksy -81, tehtävä 8.)
 c) Osoita, että $|x + \frac{1}{x}| \geq 2$, kun $x \neq 0$ (YO syksy -83, tehtävä 5a)
 d) Ratkaise itseisarvoepäyhtälö $|\lg(x+1)| < 1$

Vastaus:

- a) $x < -55\frac{2}{9}$ tai $x > 55\frac{8}{9}$
 b) $\frac{1}{1+k} < x < \frac{1}{1-k}$
 d) $x > 9$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} \text{a) } & |\frac{2x+1}{3x-1} - \frac{2}{3}| < 0,01 \\ & \Leftrightarrow |\frac{6x+3-6x+2}{9x-3}| < 0,01 \\ & \Leftrightarrow \frac{|5|}{|9x-3|} < 0,01 \\ & \Leftrightarrow \frac{5}{|9x-3|} < 0,01 \\ & \Leftrightarrow 5 < 0,01 \cdot |9x-3| \\ & \Leftrightarrow 500 < |9x-3| \\ & \Leftrightarrow x > 55\frac{8}{9} \text{ tai } x < -55\frac{2}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & |\frac{1}{x} - 1| < k \\ & \Leftrightarrow |\frac{1-x}{x}| < k \\ & \Leftrightarrow \frac{|1-x|}{|x|} < k \\ & \Leftrightarrow |1-x| < k \cdot |x| \\ & \Leftrightarrow (1-x)^2 < k^2 x^2 \\ & \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 < k^2 x^2 \\ & \Leftrightarrow x^2(1-k^2) - 2x + 1 < 0 \\ & \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm k}{1+k^2} \\ & \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{1-k}, x_2 = \frac{1}{1+k} \end{aligned}$$

Koska $0 < k < 1$ ja $k \neq \pm 1$, $\frac{1}{1+k} < x < \frac{1}{1-k}$.

- c) $|x + \frac{1}{x}| \geq 2$
 $\Leftrightarrow \frac{|x^2+1|}{|x|} \geq 2, \text{ kun } x \neq 0$
 $\Leftrightarrow |x^2+1| \geq 2|x|$
 $\Leftrightarrow x^2+1 \geq 2|x|$
 $\Leftrightarrow (x^2+1)^2 \geq 4x^2$
 $\Leftrightarrow (x^2+1)^2 - (2x)^2 \geq 0$
 $\Leftrightarrow (x^2+1+2x)(x^2+1-2x) \geq 0$
 $\Leftrightarrow (x^2+1)^2(x-1)^2 \geq 0, \text{ mikä on tosi. } \square$
- d) $|\lg(x+1)| < 1$
 $\Leftrightarrow 10^1 < x+1$
 $\Leftrightarrow x > 9$

21. Ratkaise neliöjuuriyhtälön reaaliset juuret

- a) $\sqrt{x+2} = \sqrt{2x+1}$
b) $\sqrt{x+2} = x-1$
c) $\sqrt{2x+1} = |x|$
d) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = \sqrt{4-x}$
e) $\sqrt{x+12} - \sqrt{x-9} = \sqrt{x+23} - \sqrt{x-4}$

Vihje:

- * Juuriyhtälön ratkaiseminen
- * Toinen potenssi yhtälön sievennystoimenpiteenä on luvallinen vain, jos yhtälön molemmat puolet ovat samanmerkkisiä.

Vastaus:

- a) $x = 1$
b) $x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$
c) $x_1 = 1 + \sqrt{2}, x_2 = 1 - \sqrt{2}$
d) $x = 3$
e) $x = 13$

Ratkaisu:

- a) $\sqrt{x+2} = \sqrt{2x+1} \quad | \cdot 2. \text{ pot.}$
 $\Leftrightarrow x+2 = 2x+1$
 $\Leftrightarrow x = 1$

b) $\sqrt{x+2} = x-1 \quad | 2. \text{ pot.}$

$$\Leftrightarrow x+2 = (x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Reaalisuusehdon $x+2 \geq \Leftrightarrow x \geq -2$ ja toisen potenssin käytön seuraksena saadun ehdon $x \geq 1$ perusteella $x = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 3,303$.

c) $\sqrt{2x+1} = |x| \quad | 2. \text{ pot.}$

$$\Leftrightarrow 2x+1 = x^2$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

Reaalisuusehdon $2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$ perusteella $x = 1 \pm \sqrt{2}$.

d) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = \sqrt{4-x}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+3} = \sqrt{4-x} + \sqrt{x+1} \quad | 2. \text{ pot.}$$

$$\Leftrightarrow 2x+3 = (\sqrt{4-x} + \sqrt{x+1})^2$$

$$\Leftrightarrow x-1 = \sqrt{4-x}\sqrt{x+1} \quad | 2. \text{ pot.}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = (\sqrt{4-x}\sqrt{x+1})^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 7}{4}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 3, \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

Reaalisuusehtojen $2x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1\frac{1}{2}$, $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ ja $4-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$ sekä toisen potenssin seurauksena saadun ehdon $x \geq 1$ perusteella $x = -\frac{1}{2}$.

e) $\sqrt{x+12} - \sqrt{x-9} = \sqrt{x+23} - \sqrt{x-4}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+12} + \sqrt{x-4} = \sqrt{x+23} + \sqrt{x-9}$$

$$\Leftrightarrow -x+25 = \sqrt{x+23}\sqrt{x-9} \quad | 2. \text{ pot.}$$

$$\Leftrightarrow (-x+25)^2 = (x+23)(x-9)$$

$$\Leftrightarrow x = 13$$

Ratkaisu $x = 13$ toteuttaa reaalisuusehdot $x+12 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -12$, $x-9 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 9$, $x+23 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -23$ ja $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$ sekä toisen potenssin käytön seurauksena saadun ehdon $x \leq 25$.

22. Ratkaise neliöjuuriepäyhtälön reaaliset juuret

a) $\sqrt{2-x} < 3$

b) $\sqrt{x+13} < \sqrt{6-x}$

c) $\sqrt{x+2} < x$

d) $\sqrt{3-x} \geq x-1$

e) Osoita, että $\sqrt{2x+1} < x+1$, kun $x > 0$.

Vastaus:

a) $-7 < x \leq 2$

b) $-13 \leq x < -3\frac{1}{2}$

c) $x > 2$

d) $x \leq 2$

Ratkaisu:

a) $\sqrt{2-x} < 3 \quad | 2. \text{ pot.}$

$$\Leftrightarrow 2-x < 9$$

$$\Leftrightarrow x > -7$$

Reaalisuusehdon $2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$ mukaan epäyhtälö toteutuu, kun $-7 < x \leq 2$.

b) $\sqrt{x+13} < \sqrt{6-x} \quad | 2. \text{ pot.}$

$$\Leftrightarrow x+13 < 6-x$$

$$\Leftrightarrow x < -\frac{7}{2}$$

Reaalisuusehtojen $x+13 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -13$ ja $6-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 6$ mukaan epäyhtälö toteutuu, kun $-13 \leq x \leq -3\frac{1}{2}$.

c) $\sqrt{x+2} < x \quad | 2. \text{ pot.}$

$$\Leftrightarrow x+2 < x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = -1$$

Reaalisuusehdon $x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$ ja toisen potenssin käytön seurauksena saadun ehdon $x \geq -2$ mukaan epäyhtälö toteutuu, kun $x > 2$.

d) $\sqrt{3-x} \geq x-1 \quad | 2. \text{ pot.}$

$$\Leftrightarrow 3-x \geq (x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = -1$$

Reaalisuusehdon $3-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$ ja toisen potenssin käytön seurauksena saadun ehdon $x \geq 1$ mukaan epäyhtälö toteutuu, kun $1 < x < 2$. Epäyhtälön pienempi puoli voi kuitenkin olla tässä tapauksessa myös negatiivinen, jolloin saadaan ehto $x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$ ja ratkaisuksi tällöin $x \leq 2$.

e) $\sqrt{2x+1}$

$$< \sqrt{x^2+2x+1}$$

$$= \sqrt{(x+1)^2}$$

$$= |x+1|$$

$$= x+1 \square$$

23. Ratkaise yhtälö

a) $2^{x^2-x} = 4^{x+2}$

b) $3 \cdot 3^x = 9\sqrt{3}$

$$\text{c) } \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3x-4}$$

$$\text{d) } 2^{3x+1} = 1$$

$$\text{e) } 2^{3x} + 1 = 0$$

$$\text{f) } \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$\text{g) } \log_3 \sqrt{3} = x$$

Vihje:

* Eksponenttifunktion määrittely ja perusominaisuudet

* Logaritmifunktion määrittely

Vastaus:

$$\text{a) } x_1 = 4, x_2 = -1$$

$$\text{b) } x = 1\frac{1}{2}$$

$$\text{c) } x = 1$$

$$\text{d) } x = -\frac{1}{3}$$

e) Ei ratkaisua.

$$\text{f) } x < -\frac{1}{2}$$

$$\text{g) } x = \frac{1}{2}$$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} \text{a) } 2^{x^2-x} &= 4^{x+2} \\ \Leftrightarrow 2^{x^2-x} &= (2^2)^{x+2} \\ \Leftrightarrow 2^{x^2-x} &= 2^{2x+4} \\ \Leftrightarrow x^2 - x &= 2x + 4 \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow x_1 &= 4, x_2 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 3 \cdot 3^x &= 9\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow 3^{1+x} &= 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{2+\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow 1+x &= 2 + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x &= 1\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} &= \left(\frac{3}{2}\right)^{3x-4} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} &= \left(\frac{2}{3}\right)^{-3x+4} \\ \Leftrightarrow 2x-1 &= -3x+4 \\ \Leftrightarrow x &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 2^{3x+1} &= 1 \\ \Leftrightarrow 2^{3x+1} &= 2^0 \\ \Leftrightarrow 3x+1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } 2^{3x} + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2^{3x} &= -1 \\ \Rightarrow \text{Yhtälöllä ei voi olla ratkaisua.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} &> \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \\ \Leftrightarrow 2x &< -1 \\ \Leftrightarrow x &< -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \log_3 \sqrt{3} &= x \\ \Leftrightarrow 3^x &= \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$