

Algebra

1. Ovatko alla olevat väittämät tosia? Perustele tai anna vastaesimerkki.

- a) Luku -2 on luonnollinen luku.
- b) $-2 \in \mathbb{Z}$
- c) Luvut $\frac{5}{6}$ ja $-7\frac{2}{8}$ ovat rationaalilukuja, mutta luvut $\sqrt{2}$ ja π eivät.
- d) $\sin(45^\circ) \in \mathbb{R}$
- e) Kompleksiluvut $\mathbb{C}$ ovat muotoa $z = a + bi$, missä i on imaginääriyksikkö.

Vihje:

- * Reaalilukujoukko
- * Kompleksitaso

2. Laske

- a) $(-2)^3 + (-1)^4 - (-1)^2 + (-3)^2 - (-1)^7$
- b) $(-8)^{-1} - (-2)^{-3} + 3 \cdot (-8)^{-1} + 5 \cdot (-2)^{-3}$
- c) $(\frac{1}{2})^5 + 2^{-4} - \frac{1}{2^3} + \frac{2^5}{2^4}$
- d) $(2^3)^{-5+5} - 2^{3^2}$
- e) $\left((\sqrt{4})^3\right)^2 - \left((\sqrt[3]{2 \cdot 3})^2\right)^6$
- f) $2^{2/3}(2^{1/6} \cdot 4^{1/3})^{-1}$
- g) $-2\left(-\left(-(-7) - 1/2(\sqrt{2})^2\right)^2\right) + 25^{\frac{1}{2}}$

Mahdolliset ratkaisut:

77, -63 , 2 , $\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$, -1232 , -1 , 103 , $1\frac{31}{32}$, -511 , 3

Vihje:

- * Potenssin laskusääntöjä
 - 1) Potenssin määritelmä: $a^n = a \cdot a \cdot a \dots a$
 - 2) Negatiivinen potenssi: $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$, kun $a \neq 0$
 - 3) Samankantaisten potenssin tulo: $a^m a^n = a^{m+n}$
 - 4) Samankantaisten potenssien osamäärä: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

- 5) Tulon potenssi: $(ab)^n = a^n b^n$
 6) Osamäärän potenssi: $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$
 7) Potenssin potenssi: $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$
 8) Murtoluku potenssina: $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$
 9) $x^0 = 1$, kun $x \in \mathbb{R}$

* Kokonaislukupotenssit

* Juuret

3. Laske

- a) $(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4}) : (\frac{2}{3} \cdot 1\frac{3}{4} - \frac{3}{4})$
 b) $\frac{-2^3 - (-2^0)^3}{(2^{-1})^{-3} - 2^{-3}}$
 c) $[(-\frac{2}{3})^3 - (-1\frac{1}{2})^{-3}] : (-4\frac{1}{3})$
 d) $|2^{-2} - 5^{-2}| - (-10)^{-2}$

Mahdollisia ratkaisuja: $\frac{7}{5}, -\frac{8}{7}, 0, \frac{1}{5}, -\frac{8}{9}, -\frac{3}{13}, \frac{11}{50}$

Vihje:

- a) $\frac{p}{q} : \frac{s}{t} = \frac{p}{q} \cdot \frac{t}{s}$ kun $p, q, s, t \in \mathbb{Z}$ ja $q, t, s \neq 0$
 d) $|x| = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0, x \in \mathbb{R} \\ -x, & \text{kun } x < 0 \end{cases}$

4. Jaa polynomi tekijöihin

- a) $x^2 - 4$
 b) $x^2 - 1$
 c) $25x^2 - 36y^2$
 d) $2x^4 - 32$
 e) $\frac{(2a-b)(a+2b)-3ab}{a+b}$

Vihje:

- * $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
 * Polynomien alkeellinen tekijöihin jako

5. Sievennä lauseke

a) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-2x+1}$

b) $\frac{4x^2-12x+9}{4x^3-4x^2+x}$

c) $\frac{-a^2+2a-1}{2a^2-a^4-1}$

Vihje:

* $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

6. Jaa polynomi tekijöihin

a) $x^3 - 3x^2 + 2x - 6$

b) $a^2 - ab - a + b$

Vihje:

* Jäsenten sopiva ryhmittely

7. Sievennä

a) $\frac{3x^2-6}{x^2+x} - \frac{3}{x+1}$

b) $\log_4 \frac{5}{3} - \ln \frac{2}{7} + \log_4 \frac{3}{5} + \ln 7^2 + \ln(2 \cdot 7)$

c) $\log_{21} 21^4 - \log_{52} 52 + \log_{700} 700^{50} + \log_{18} 1 - 72^{\log_{72} 68}$

d) $|x-2| + |x+1| - (x+3)$

e) $\sqrt{x^2+4x+4} - \sqrt{x^2}$

Vihje:

a) Tekijöihin jako: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$

b) $\log xy = \log x + \log y,$
 $\log \frac{x}{y} = \log x - \log y,$
 $\log x^r = r \log x$

c) $\log_a 1 = 0,$
 $\log_a a = 1,$
 $\log_a a^x = x,$
 $a^{\log_a x} = x$

d) Tarkastele lausekkeen arvoa eri väleillä.

e) $\sqrt{x^2} = |x|$

* Tekijöihin jako polynomin nollakohtien avulla

* Logaritmifunktion määrittely

8. Millä x :n reaalisilla arvoilla lauseke

a) $\frac{2x-1}{2x+1}$

b) $\frac{2x-1}{x^2+1}$

c) $\frac{2x+1}{-2x+\sqrt{25x^4-9x^2}}$

d) $\log(x^2\sqrt{x-1})$

on määritelty?

Vihje:

* Murtoluku on muotoa $\frac{p}{q}$, jossa $q \neq 0$.

* Neliöjuurilausekkeen reaalisuusehto: $\sqrt{a} \in \mathbb{R}$, kun $a \geq 0$.

* Logaritmin määritelmä: $\log_a x$, kun $a > 0, a \neq 1$ ja $x > 0$.

9. Ratkaise ensimmäisen asteen yhtälö

a) $x - 2(x - 3) = x - 4(x + 3)$

b) $(x + 1)^2 - x^2 = 2(x + 1)$

c) $x(x + 1) - (x - 1) = x^2 + 1$

d) $x^2 - 3(x - 4) = (x + 3)^2$

Vihje:

* Ensimmäisen ja toisen asteen yhtälöt

10. Ratkaise ensimmäisen asteen yhtälö

a) $\frac{3x+1}{2} - \frac{x-5}{4} = 2x + 1$

b) $\frac{8x+9}{10} - \frac{7x-6}{25} = \frac{3x+6}{5} - \frac{x+3}{20}$

c) Ratkaise a :n ja b :n suhteen yhtälö $\frac{a-b}{bt} = \frac{3}{5}$ kun $a, b, t > 0$.

d) Ratkaise x :n suhteen yhtälö $ax - a = 2x$.

Vihje:

d) Muuttuja a on parametri, jonka vaikutus tehtävän ratkaisuun on otettava huomioon.

11. Ratkaise toisen asteen yhtälö

a) $2x^2 - 18 = 0$

b) $(2x + 1)^2 = 5$

c) $2x^2 - x = 3x$

d) $(x - 1)(2x + 1) = 0$

Mahdollisia ratkaisuja:

$$x = -3, x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, x = -1, x = -\frac{4}{5}, x = -\frac{1}{2}, x = 0, x = \sqrt{2}, x = \frac{8-2\sqrt{7}}{3}, x = \frac{1}{2},$$
$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, x = 1, x = 2, x = 3, x = \frac{8+2\sqrt{7}}{3}, x = \frac{-1-\sqrt{1+a}}{a}, x = \frac{-1+\sqrt{1+a}}{a}, x = \frac{-1-\sqrt{1-a}}{a},$$
$$x = \frac{-1+\sqrt{1-a}}{a}, \text{ yhtälöllä ei ole ratkaisua, kaikki reaaliset luvut ovat yhtälön ratkaisuja.}$$

12. Ratkaise toisen asteen yhtälö

a) $(x - 5)(1 - 3x) = 7$

b) $x^2 + 3x + 4 = 0$

c) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{5}x - \frac{4}{15} = 0$

d) $x^2 - 2x - \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} = 0$

e) Ratkaise x :n suhteen yhtälö $ax^2 + 2x - 1 = 0$.

Mahdollisia ratkaisuja:

$$x = -3, x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, x = -1, x = -\frac{4}{5}, x = -\frac{1}{2}, x = 0, x = \sqrt{2}, x = \frac{8-2\sqrt{7}}{3}, x = \frac{1}{2},$$
$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, x = 1, x = 2, x = 3, x = \frac{8+2\sqrt{7}}{3}, x = \frac{-1-\sqrt{1+a}}{a}, x = \frac{-1+\sqrt{1+a}}{a}, x = \frac{-1-\sqrt{1-a}}{a},$$
$$x = \frac{-1+\sqrt{1-a}}{a}, x = -\frac{1}{a}, \text{ yhtälöllä ei ole ratkaisua, kaikki reaaliset luvut ovat yhtälön ratkaisuja.}$$

Vihje:

e) Muuttuja a on parametri, jonka vaikutus tehtävän ratkaisuun on otettava huomioon.

Toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ diskriminantti $D = b^2 - 4ac$ säätelee juurien lukumäärää:

1) Jos $D > 0$, yhtälöllä on kaksi ratkaisua.

2) Jos $D = 0$, yhtälöllä on yksi ratkaisu.

3) Jos $D < 0$, yhtälöllä ei ole yhtään ratkaisua.

13. Ratkaise yhtälö

a) $(x+3)(x^2+x-6) = 0$

b) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$

c) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

Vihje:

c) Bikvadraattinen yhtälö. Merkitään $x^2 = u$.

14. Ratkaise ensimmäisen asteen epäyhtälö

a) $2(x + \sqrt{5}) < \sqrt{5}(x + 2)$

b) $x - 3(x + 1) \leq 2(1 - x)$

c) $\frac{1-x}{x+2} \geq 0$

d) $\frac{x}{x+1} \leq \frac{1}{2-x}$

e) $\frac{4}{x} > x$

f) Ratkaise x :n suhteen epäyhtälö $ax \leq 1 - 2x$.

Vihje:

* Epäyhtälö

15. Ratkaise toisen asteen epäyhtälö

a) $x^2 + 2x - 8 > 0$

b) $x(5 - x) \geq 6$

c) $x^2 \geq 5$

d) $-x^2 + 4x \leq 5$

e) $x^2 - 4x + 4 \geq 0$

16.

a) Ratkaise toisen asteen epäyhtälö $x + 4 \leq \frac{5}{x}$

b) Millä x :n arvoilla lauseke $\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \sqrt{x^2 - x - 2}$ on reaalinen?

c) Millä a :n arvoilla yhtälön $x^2 - 2ax + 3 = 0$ juuret ovat reaaliset?

Vihje:

b) Määritelmän mukaan neliöjuurilauseke $\sqrt{a} \in \mathbb{R}$, kun $a \geq 0$. Lisäksi rationaaliluku $\frac{p}{q} \in \mathbb{R}$, kun $q \neq 0$.

17. Ratkaise yhtälö

- a) $|x - 1| = 3$
- b) $|x + 7| = |3x + 5|$
- c) $|x - 2| = -5$
- d) $|2x + 5| = x - 7$

Vihje:

- * Reaaliluvun itseisarvo
- * Itseisarvoyhtälön ratkaiseminen

18. Ratkaise yhtälö

- a) $x^2 - 6 = |5x|$
- b) $|2 + |x - 1|| = 3$
- c) $|x - 1| + |x + 4| - (x - 1) = 2$

19. Ratkaise itseisarvoepäyhtälö

- a) $|3 - 2x| < 5$
- b) $|x - 1| > 2$
- c) $|2x - 1| > 3x$
- d) $|x| + |x - 2| \leq x + 1$

20.

- a) Ratkaise itseisarvoepäyhtälö $|\frac{2x+1}{3x-1} - \frac{2}{3}| < 0,01$ (YO kevät -90, tehtävä 6a)
- b) Ratkaise itseisarvoepäyhtälö $|\frac{1}{x} - 1| < k$, kun $0 < k < 1$ (YO syksy -81, tehtävä 8.)

c) Osoita, että $|x + \frac{1}{x}| \geq 2$, kun $x \neq 0$ (YO syksy -83, tehtävä 5a)

d) Ratkaise itseisarvoepäyhtälö $|\lg(x+1)| < 1$

21. Ratkaise neliöjuuriyhtälön reaaliset juuret

a) $\sqrt{x+2} = \sqrt{2x+1}$

b) $\sqrt{x+2} = x-1$

c) $\sqrt{2x+1} = |x|$

d) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = \sqrt{4-x}$

e) $\sqrt{x+12} - \sqrt{x-9} = \sqrt{x+23} - \sqrt{x-4}$

Vihje:

* Juuriyhtälön ratkaiseminen

* Toinen potenssi yhtälön sievennystoimenpiteenä on luovallinen vain, jos yhtälön molemmat puolet ovat samanmerkkisiä.

22. Ratkaise neliöjuuriepäyhtälön reaaliset juuret

a) $\sqrt{2-x} < 3$

b) $\sqrt{x+13} < \sqrt{6-x}$

c) $\sqrt{x+2} < x$

d) $\sqrt{3-x} \geq x-1$

e) Osoita, että $\sqrt{2x+1} < x+1$, kun $x > 0$.

23. Ratkaise yhtälö

a) $2^{x^2-x} = 4^{x+2}$

b) $3 \cdot 3^x = 9\sqrt{3}$

c) $(\frac{2}{3})^{2x-1} = (\frac{3}{2})^{3x-4}$

d) $2^{3x+1} = 1$

e) $2^{3x} + 1 = 0$

f) $(\frac{1}{2})^{2x} > (\frac{1}{2})^{-1}$

g) $\log_3 \sqrt{3} = x$

Vihje:

- * Eksponenttifunktion määrittely ja perusominaisuudet
- * Logaritmifunktion määrittely