Teknillinen korkeakoulu Alestalo/von Pfaler
Matematiikka

Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3, syksy 1999
3. välikoe 16.12.1999 klo 16-19

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille
– kurssin nimi: K3 **tai** P3; jos vielä harkitset KeTeMan suorittamista, ota yhteyttä luennoitsijaan
– päiväys, välikokeen numero
– opiskelijanumero+kirjain, sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet
– koulutusohjelma (K3: Kon, Ryk, Ark, Maa; P3: Kem, Mak, Puu)
– mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat
– nimikirjoitus

1. Muodosta funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{kun } 0 \le x \le 1, \\ 1, & \text{kun } 1 < x \le 2, \end{cases}$$

parillinen 4-jaksollinen jatke funktioksi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ja määritä sen Fourier-sarja. Kirjoita eksplisiittisesti näkyviin ainakin kolme ensimmäistä nollasta poikkeavaa sarjakehitelmän termiä.

2. a) Totea yhtälöön sijoittamalla, että funktio $u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$ on aaltoyhtälön $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ ratkaisu, kun $x \in \mathbf{R}$ ja $t > 0$. Tässä f ja g ovat mitä tahansa kaksi kertaa jatkuvasti derivoituvia funktioita ja c on vakio.
b) Oletetaan, että hetkellä $t = 0$ on $u(x,0) = \sin x$ ja

$$u_t(x,0) = \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\Big|_{t=0} = 0.$$

Määritä näiden alkuehtojen avulla funktiot f ja g ja edelleen ratkaisu $u(x,t)$. (Huom: Välivaiheissa saattaa esiintyä tuntemattomaksi jäävä vakio, mutta lopullisen vastauksen $u(x,t)$ täytyy olla yksikäsitteinen. Tehtävän tilanne vastaa koko reaaliakselilla liikkuvia aaltoja, joiden amplitudi on $u(x,t)$.)

3. Tarkastellaan lämmön johtumista sivuiltaan eristetyssä metallisauvassa, jonka pituus on 10 ja jonka lämpötilaa kuvaa funktio $u(x,t)$. Sauvan vasenta päätä lämmitetään siten, että $u(0,t) = 4t$. Sauvan oikea pää pidetään koko ajan lämpötilassa 0, ja hetkellä $t = 0$ koko sauvan lämpötila on 0. Määritä numeerisesti hetkellä $t = 3$ sauvan lämpötilojen likiarvot hilapisteissä, kun askelpituus x-koordinaatille on 1 ja t-koordinaatille 0,5.
Vihje: Differenssimenetelmää käytettäessä on hilapisteiden (x_i, t_j) lämpötilojen likiarvoille u_{ij} voimassa palautuskaava

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{2}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}).$$

Voit piirtää kuvan ja laskea lämpötiloja suoraan hilapisteisiin.

4. Tutkitaan lämmön johtumista sivuiltaan eristetyssä sauvassa, jonka päät ovat pisteissä $x = 0$ ja $x = \pi$. Alkuhetkellä sauvan lämpötilalle $u(x,t)$ pätee $u(x,0) = 100\sin(2x)$ ja sauvan molemmat päät pidetään koko ajan lämpötilassa 0. Määritä sauvan lämpötila $u(x,t)$, kun $t > 0$.
Ohje: Lämpötila toteuttaa yhtälön $u_t = c^2 u_{xx}$, missä c on vakio. Aloita muuttujien erottelulla ja käsittele tarkasti kaikki välivaiheet.

Fourier-sarjoihin liittyviä kaavoja

Olkoon $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ paloittain jatkuva ja $2L$-jaksollinen. Silloin pätee (tietyssä mielessä)

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right),$$

missä kertoimilla on lausekkeet

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx \quad \text{ja} \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx,$$

kun $n \ge 1$, ja

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, dx.$$