Teknillinen korkeakoulu
Matematiikka
Alestalo/Laiho

Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3, syksy 2001
3. välikoe 13.12.2001 klo 16-19

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Vain funktiolaskimet ovat sallittuja!

1. a) Ratkaise Z-muunnoksen avulla differenssiyhtälö $a_{n+1} - 5a_n = (-1)^n$, $a_0 = 6$.
   b) Määritä lukujonon (a_n) Z-muunnos, kun $a_n = n \cdot 2^n \sin(n\pi/2)$.

2. Funktio $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on 6-jaksollinen, pariton ja $f(x) = x/3$, kun $0 \le x < 3$. Piirrä funktion f kuvaaja välillä $[-6, 6]$ ja määritä sen Fourier-sarja. Kirjoita erikseen näkyville sarjan kolme ensimmäistä nollasta poikkeavaa termiä.

3. Alueessa $0 < x < 1$, $t > 0$ määritellyn aaltoyhtälön $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ yleinen ratkaisu on muotoa $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\pi ct) + B_n \sin(n\pi ct)) \sin(n\pi x)$.
   Määritä ne ratkaisut $u(x,t)$, jotka toteuttavat alkuehdot
   a) $u(x,0) = 3\sin(2\pi x) + 6\sin(7\pi x)$, $u_t(x,0) = 0$.
   b) $u(x,0) = 5\sin(3\pi x)$, $u_t(x,0) = \sin(\pi x) - 3\sin(2\pi x)$.

4. Tarkastellaan ns. reaktiivisen diffuusioyhtälön $u_t = u_{xx} + u$ numeerista ratkaisemista, kun $u = u(x,t)$, $0 \le x \le 5$ ja $t \ge 0$.
   a) Olkoon $n \in \mathbf{N}$. Valitaan x-askelpituutta $h = 5/n$ vastaavat tasaväliset jakopisteet x_i sekä t-askelta k vastaavat pisteet $t_j = j \cdot k$, missä $0 \le i \le n$ ja $j \ge 0$. Selitä, miten approksimaatioita

$$\begin{aligned} u_t(x_i, t_j) &\approx \frac{1}{k}(u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)) \\ u_{xx}(x_i, t_j) &\approx \frac{1}{h^2}(u(x_{i+1}, t_j) + u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j)) \end{aligned}$$

   käyttämällä saadaan palautuskaava

$$u_{i,j+1} = \frac{k}{h^2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + \left(1 + k - \frac{2k}{h^2}\right) u_{ij},$$

   kun merkitään $u_{ij} \approx u(x_i, t_j)$.
   b) Jos reunaehtojen $u(0,t) = u(5,t) = 0$ (kaikilla $t \ge 0$) lisäksi on annettu alkuehto $u(x,0) = 10x(5-x)$, niin määritä a-kohdan avulla likiarvot $u_{i,2}$ tapauksessa $h = 1$ ja $k = 1/2$.

Olkoon $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ paloittain jatkuva ja $2L$-jaksollinen. Silloin f:n Fourier-kertoimilla on lausekkeet

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx \quad \text{ja} \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx,$$

kun $n \ge 1$, ja

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx.$$

Z-muunnokseen liittyviä kaavoja

Määritelmä: Annettu jono $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} = (a_0, a_1, \ldots)$; sen Z-muunnos on funktio $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n / z^n = a_0 + a_1/z + \ldots$.
Olkoon $A(z) = Z(a_n)$ ja $B(z) = Z(b_n)$. Pätee:

$$Z(n \cdot a_n) = -zA'(z),\ Z(c^n a_n) = A(z/c),$$

$$Z(a_{n+1}) = z(A(z) - a_0),$$

$$Z(a_{n+2}) = z^2(A(z) - a_0 - a_1/z),$$

$$Z(a_{n-1}) = A(z)/z,\ Z(a_{n-2}) = A(z)/z^k.$$

Muunnoksia:

(a_n)	$A(z) = Z(a_n)$
(1)	$z/(z-1)$
(α^n)	$z/(z-\alpha)$
$(\sin(n\alpha))$	$z\sin\alpha/(z^2 - 2z\cos\alpha + 1)$
$(\cos(n\alpha))$	$z(z-\cos\alpha)/(z^2 - 2z\cos\alpha + 1)$