Teknillinen korkeakoulu
Matematiikka

Alestalo/von Pfaler

Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3, syksy 1999
2. välikoe 15.11.1999 klo 16-19

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille
– kurssin nimi: K3, P3, KeTeMa **tai**
KeTeMa+P3: jos yrität kumpaakin, saat mahdollisuuden valita; seuraa tiedotusta
– päiväys, välikokeen numero
– opiskelijanumero+kirjain, sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet
– koulutusohjelma (K3: Kon, Ryk, Ark, Maa; P3: Kem, Mak, Puu)
– mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat
– nimikirjoitus

1. a) Ratkaise differenssiyhtälöpari

$$\begin{cases} a_{n+1} = -2a_n + 4b_n \\ b_{n+1} = 4a_n - 2b_n \end{cases}$$

   alkuehdoilla $a_0 = 0,\ b_0 = 2$. **(4 p.)**
   b) Miten menettelisit, jos a-kohdan alkuarvot olisivatkin muotoa $a_{\mathbf{1}} = 0,\ b_{\mathbf{1}} = 2$? (Ei tarvitse ratkaista; periaatteen selittäminen riittää.) **(2 p.)**

2. Esitä vektori $[-2,-7,-25]^T$ lineaarikombinaationa vektoreista $\overline{a} = [2,4,10]^T$, $\overline{b} = [2,5,14]^T$ ja $\overline{c} = [4,13,43]^T$. Ratkaise tarvittava yhtälöryhmä Gaussin eliminointimenetelmän avulla.

3. a) Selitä, miksi diagonalisoituvalle matriisille A potenssi A^n voidaan helposti laskea suurillakin n.
   b) Laske A^{1999} matriisille

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

   Vihje: Diagonalisointi on kurssilla usein kirjoitettu muodossa $A = XDX^{-1}$. Jos olet tarkkana, niin voit välttää ominais*vektoreiden* laskemisen.

4. Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 - 3x_3 &= 2 \\ 9x_1 + 3x_2 &= -3 \\ \qquad -3x_2 + 10x_3 &= 5. \end{cases}$$

   a) Mihin muotoon ryhmä olisi parasta kirjoittaa Jacobin tai Gaussin ja Seidelin iterointimenetelmiä varten?
   b) Tarkista, että esittämäsi muoto todella johtaa suppenevaan iteraatioon Jacobin menetelmän tapauksessa.
   c) Miksei tälle ryhmälle voida suoraan soveltaa Choleskyn menetelmää? Vaihda yhtälöiden järjestys sopivaksi ja muodosta saamasi ryhmän kerroinmatriisille Choleskyn hajotelma.
   Muistutus: Choleskyn menetelmä perustuu LL^T-hajotelmaan symmetrisille ja positiivisesti definiiteille matriiseille.

Z-muunnokseen liittyviä kaavoja

Määritelmä: Annettu jono $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} = (a_0, a_1, \dots)$; sen Z-muunnos on funktio $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n/z^n = a_0 + a_1/z + \dots$.
Siirrot: $T(a_n) = (a_{n-1}) = (0, a_0, a_1, \dots)$ siirto taaksepäin,
$E(a_n) = (a_{n+1}) = (a_1, a_2, \dots)$ siirto eteenpäin.
Jonojen konvoluutio:
$(a_n) * (b_n) = (\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k})_{n\in\mathbf{N}} = (a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, \dots)$.
Olkoon $A(z) = Z(a_n)$ ja $B(z) = Z(b_n)$. Pätee:

$$Z(na_n) = -zA'(z),\ Z(c^n a_n) = A(z/c),\ Z((a_n)*(b_n)) = A(z)B(z),$$

$$Z(E(a_n)) = Z(a_{n+1}) = z(A(z) - a_0),$$

$$Z(E^2(a_n)) = Z(a_{n+2}) = z^2(A(z) - a_0 - a_1/z),$$

$$Z(T(a_n)) = A(z)/z,\ Z(T^k(a_n)) = A(z)/z^k.$$

Muunnoksia:

(a_n)	$A(z) = Z(a_n)$
(1)	$z/(z-1)$
$T(1)$	$1/(z-1)$
(α^n)	$z/(z-\alpha)$
$T(\alpha^n)$	$1/(z-\alpha)$
$(\sin(n\alpha))$	$z\sin\alpha/(z^2 - 2z\cos\alpha + 1)$
$(\cos(n\alpha))$	$z(z-\cos\alpha)/(z^2 - 2z\cos\alpha + 1)$