Teknillinen korkeakoulu Alestalo/Laiho
Matematiikka

Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3, syksy 2001
2. välikoe 12.11.2001 klo 16-19

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Vain funktiolaskimet ovat sallittuja!

1. Määritä (tavalla tai toisella) differentiaaliyhtälöryhmälle $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$
   a) yleinen ratkaisu, b) alkuehdon $\mathbf{y}(0) = [1, -2]^T$ toteuttava ratkaisu. Tässä
$$A = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ -5 & -8 \end{bmatrix}.$$

2. Tarkastellaan epälineaarista differentiaaliyhtälöryhmää
$$\begin{cases} y_1' = 2y_2 - 2y_1y_2 \\ y_2' = y_1 - y_2. \end{cases}$$
   a) Määritä systeemin kriittiset pisteet (eli tasapainotilat).
   b) Suorita linearisointi kaikissa kriittisissä pisteissä ja tutki niiden stabiilisuutta.
   c) Laske Eulerin menetelmän avulla likiarvo yhtälöihin liittyvän alkuarvotehtävän $\mathbf{y}(0) = [1, -2]^T$ ratkaisulle hetkellä $t = 0{,}1$ käyttämällä yhtä askelta.

3. Ratkaise Laplace-muunnoksen avulla alkuarvotehtävä
   $y'' - 4y' + 4y = \delta(t-2)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

4. a) Määritä Laplace-käänteismuunnos lausekkeesta
$$\frac{1}{(s^2+1)(s+1)^2}.$$
   b) Ratkaise integraaliyhtälö
$$y(t) = 1 - 4\int_0^t (t-\tau)y(\tau)\, d\tau.$$

Laplace-muunnoksiin liittyviä kaavoja

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $F = \mathcal{L}f$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt$. Merkitään $u(t)$ = Heavisiden askelfunktio ja $\delta(t)$ = Diracin delta-funktio. Pätee:

$$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0), \quad (\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$
$$(\mathcal{L}f^{(n)})(s) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$
$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right\}(s) = \frac{1}{s}F(s), \quad \mathcal{L}(f*g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g),$$

missä $(f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau = (g*f)(t)$;

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s-a), \quad \mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s).$$

Muunnoksia:

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u(t-a)$	e^{-as}/s
1	$1/s$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$1/(s-a)$
$\sin\omega t$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
$\cos\omega t$	$s/(s^2+\omega^2)$
$\sinh at$	$a/(s^2-a^2)$
$\cosh at$	$s/(s^2-a^2)$