

Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3, syksy 2001

2. välikoe 12.11.2001 klo 16-19

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Vain funktiolaskimet ovat sallittuja!

1. Määritä (tavalla tai toisella) differentiaaliyhtälöryhmälle $y' = Ay$

a) yleinen ratkaisu, b) alkuehdon $y(0) = [1, -2]^T$ toteuttava ratkaisu.
Tässä

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ -5 & -8 \end{bmatrix}.$$

2. Tarkastellaan epälineaarista differentiaaliyhtälöryhmää

$$\begin{cases} y_1' = 2y_2 - 2y_1 y_2 \\ y_2' = y_1 - y_2. \end{cases}$$

a) Määritä systeemin kriittiset pisteet (eli tasapainoilat).

b) Suorita linearisointi kaikissa kriittisissä pisteissä ja tutki niiden staabiisuutta.

c) Laske Eulerin menetelmän avulla likiarvo yhtälöihin liittyvän alkuarvotehävän $y(0) = [1, -2]^T$ ratkaisulle hetkellä $t = 0,1$ käyttämällä yhtä askelta.

3. Ratkaise Laplace-muunnoksen avulla alkuarvotehävä
 $y'' - 4y' + 4y = \delta(t - 2)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

4. a) Määritä Laplace-käanteismuunnos lausekkeesta

$$\frac{1}{(s^2 + 1)(s + 1)^2}.$$

b) Ratkaise integraaliyhtälö

$$y(t) = 1 - 4 \int_0^t (t - \tau)y(\tau) d\tau.$$

Laplace-muunnoksiin liittyviä kaavoja

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $F = \mathcal{L}f$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$. Merkittään $u(t) =$ Heavisiden askelfunktio ja $\delta(t) =$ Diracin delta-funktio. Pätee:

$$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0), \quad (\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$(\mathcal{L}f^{(n)})(s) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\}(s) = \frac{1}{s}F(s), \quad \mathcal{L}(f * g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g),$$

$$\text{missä } (f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau = (g * f)(t);$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s - a), \quad \mathcal{L}\{u(t - a)f(t - a)\} = e^{-as}F(s).$$

Muunnoksia:

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t - a)$	e^{-as}
$u(t - a)$	e^{-as}/s
1	$1/s$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$1/(s - a)$
$\sin \omega t$	$\omega/(s^2 + \omega^2)$
$\cos \omega t$	$s/(s^2 + \omega^2)$
$\sinh at$	$a/(s^2 - a^2)$
$\cosh at$	$s/(s^2 - a^2)$