Teknillinen korkeakoulu Alestalo/von Pfaler
Matematiikka

Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3, syksy 1999
1. välikoe 18.10.1999 klo 16-19

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille
– opintojakson nimi ja päiväys, välikokeen numero
– opiskelijanumero+kirjain, sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet
– koulutusohjelma (Aut, Tfy, Tik, Tuo, Säh, Kon, Kem, Mak, Puu, Maa, Ryk)
– mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat
– nimikirjoitus

1. Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä $y'' + y' - 20y = 100$ alkuarvoilla $y(0) = -6,\ y'(0) = -22$. Muunna yhtälö ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmäksi merkitsemällä $y_1 = y$ ja $y_2 = y'$ **(1 p.)**. Ratkaise saatu ryhmä **(4 p.)** ja anna tämän perusteella ratkaisu myös alkuperäiselle toisen kertaluvun yhtälölle. **(1 p.)**
Vihje: Etsi ensin vastaavan homogeenisen yhtälöryhmän yleinen ratkaisu.

2. Systeemillä
$$\begin{cases} y_1' = (1 + y_1 - y_2)^2 - 1 - 3y_1 \\ y_2' = 2y_1 - y_2 \end{cases}$$
on kriittinen piste $(0, 0)$.
a) Etsi muut kriittiset pisteet. **(1 p.)**
b) Suorita linearisointi pisteessä $(0, 0)$ ja laske linearisoidun systeemin ominaisarvot. **(2 p.)**
c) Oletetaan, että $\varepsilon > 0$ on hyvin pieni. Mitä tapahtuu (alkuperäisen systeemin) alkuarvoja $y_1(0) = -\varepsilon,\ y_2(0) = 0$ vastaavalle faasitason $(y_1(t), y_2(t))$ radalle, kun aika kuluu? Perustele edellisen kohdan avulla. **(1 p.)**
d) Laske Eulerin menetelmää käyttämällä (alkuperäisen systeemin) ratkaisun likiarvo hetkellä $t = 0{,}2$ kahdella askeleella, kun $y_1(0) = -1,\ y_2(0) = 0$. **(2 p.)**

3. Ratkaise Laplace-muunnoksen avulla differentiaaliyhtälö
$$y'' + y' = \delta(t-1) + u(t-1)$$
alkuarvoilla $y(0) = 4,\ y'(0) = 0$. Tässä δ on Diracin delta-funktio ja u on Heavisiden askelfunktio.

4. Etsi Laplace-muuntamalla funktio $y = y(t)$, joka toteuttaa integraaliyhtälön
$$y(t) + 8\int_0^t y(\tau)\,d\tau = 10t^2 - 20\int_0^t (t-\tau)y(\tau)\,d\tau.$$
Vihje: Nimittäjässä oleville toisen asteen lausekkeille kannattaa usein tehdä neliöön täydentäminen.

Laplace-muunnoksiin liittyviä kaavoja

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $F = \mathcal{L}f$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$. Merkitään $u(t)$ = Heavisiden askelfunktio ja $\delta(t)$ = Diracin delta-funktio. Pätee:

$$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0), \quad (\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$(\mathcal{L}f^{(n)})(s) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\}(s) = \frac{1}{s}F(s), \quad \mathcal{L}\{tf(t)\}(s) = -F'(s),$$

$$\mathcal{L}(f*g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g), \text{ missä } (f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = (g*f)(t);$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s-a), \quad \mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s).$$

Muunnoksia:

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u(t-a)$	e^{-as}/s
1	$1/s$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$1/(s-a)$
$\sin\omega t$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
$\cos\omega t$	$s/(s^2+\omega^2)$
$\sinh at$	$a/(s^2-a^2)$
$\cosh at$	$s/(s^2-a^2)$