Teknillinen korkeakoulu Alestalo/Astola
Matematiikka

Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3, syksy 2000
3. välikoe 14.12.2000 klo 13-16

Vain funktiolaskimet ovat sallittuja!

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille
– opintojakson nimi ja päiväys, välikokeen numero
– opiskelijanumero+kirjain, sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet
– koulutusohjelma (Kem, Kon, Maa, Mak, Puu, Ryk)
– mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat
– nimikirjoitus

1. Funktio $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on parillinen, 6-jaksollinen, ja $f(x) = x/3$, kun $x \in [0, 3]$. Hahmottele funktion f kuvaajaa ja muodosta sen Fourier-sarja. Kirjoita erikseen näkyville sarjan kolme ensimmäistä nollasta poikkeavaa termiä.

2. a) Kirjoita funktio $\cos(x+iy)$ muodossa $u(x,y)+iv(x,y)$, missä $x, y \in \mathbf{R}$ ja u, v ovat reaaliarvoisia funktioita.
   b) Määritä yhtälön $z^i = i$ kaikki ratkaisut.

3. Tarkastellaan sivuiltaan eristettyä metallisauvaa, jonka lämpötilaa kuvaa funktio $u(x,t)$, missä $0 \le x \le 5$ ja $t \ge 0$. Oletetaan, että lämpöyhtälössä $u_t = c^2 u_{xx}$ on $c = 1$. Sauvan vasen pää pidetään lämpötilassa 30 astetta ja oikea pää 10 asteen lämpötilassa.
   a) Määritä lämpötilan tasapainojakauma, jossa siis u ei riipu lainkaan muuttujasta t.
   b) Sauvan alkulämpötilaa kuvaa funktio $f(x) = 30 - 14x + 2x^2$. Käyttämällä ajalle askelpituutta $k = 0{,}5$ ja x-koordinaatille askelpituutta $h = 1$, määritä sauvan lämpötilat hilapisteissä hetkellä $t = 1$.
   Vihje: Jos $r = k/h^2$, niin differenssimenetelmää käytettäessä saadaan lämpötiloille palautuskaava $u_{i,j+1} = r(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + (1-2r)u_{i,j}$.

4. Aaltoyhtälön $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ yleinen ratkaisu alueessa $0 < x < \pi,\ t > 0$, on muotoa

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(cnt) + B_n \sin(cnt)) \sin(nx),$$

   kun reunaehtoina on $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ kaikilla $t \ge 0$.
   a) Määritä alkuehtoja $u(x,0) = 3\sin x - 4\sin(5x)$ ja $u_t(x,0) = 3\sin(2x)$ vastaava ratkaisu.
   b) Millaiset lausekkeet saadaan kertoimille A_n ja B_n alkuehdoilla $u(x,0) = f(x)$ ja $u_t(x,0) = 0$?

Lisätietoja Fourier-sarjoista:

Olkoon $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ paloittain jatkuva ja $2L$-jaksollinen. Silloin pätee (tietyssä mielessä)

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right),$$

missä kertoimilla on lausekkeet

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx \quad \text{ja} \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx,$$

kun $n \ge 1$, ja

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, dx.$$

Eulerin kaava: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, kun $x \in \mathbf{R}$.