Teknillinen korkeakoulu Alestalo/Astola
Matematiikka

Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3, syksy 2000
2. välikoe 13.11.2000 klo 16-19

Vain funktiolaskimet ovat sallittuja!

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille
– opintojakson nimi ja päiväys, välikokeen numero
– opiskelijanumero+kirjain, sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet
– koulutusohjelma (Kem, Kon, Maa, Mak, Puu, Ryk)
– mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat
– nimikirjoitus

1. Seuraavista väitteistä osa on tosia ja muut epätosia. Selvitä asia kunkin väitteen kohdalla ja perustele lyhyesti. (Oikea vastaus 1/2 pistettä, oikea perustelu 1/2 pistettä)
   a) Yhtälöryhmällä $A\overline{x} = \overline{0}$ ei ole ratkaisua, jos rg $A = 1$.
   b) Matriisin $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ sarakkeista muodostetut vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia.
   c) Funktio $D\colon C^1(\mathbf{R}) \to C(\mathbf{R})$, $(Df)(x) = 3f'(x)$, on lineaarikuvaus. Tässä $C^1(\mathbf{R})$ on jatkuvasti derivoituvien funktioiden muodostama vektoriavaruus ja $C(\mathbf{R})$ = jatkuvat funktiot.
   d) Jos λ on neliömatriisin A ominaisarvo ja $\det A \neq 0$, niin $1/\lambda$ on matriisin A^{-1} ominaisarvo.
   e) Matriisi $\begin{bmatrix} 10 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ on positiivisesti definiitti.
   f) Kaikki 3 × 5-matriisit voidaan diagonalisoida.

2. Määritä pinnan $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = 1$ yhtälö pääakselikoordinaatistossa ja selvitä pääakseleiden suunnat. Kirjoita myös näkyviin yhteys pääakselikoordinaattien ja x_i-koordinaattien välillä.

3. a) Kirjoita yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

   muodossa $A\overline{x} = \overline{b}$ ja laske kerroinmatriisin A Choleskyn LL^T-hajotelma. (Ryhmää ei tarvitse ratkaista)
   b) Kirjoita yhtälö kiintopisteyhtälönä muodossa $\overline{x} = B\overline{x} + \overline{c}$ ja laske ratkaisun likiarvo Jacobin iteraatiomenetelmän avulla käyttämällä kahta askelta.
   c) Olkoon $\overline{x}$ kiintopisteyhtälön tarkka ratkaisu. Johda Jacobin iteraatiokaavaa ja matriisinormin ominaisuuksia käyttämällä epäyhtälö $||\overline{x}^{(n+1)} - \overline{x}|| \leq ||B||_2||\overline{x}^{(n)} - \overline{x}||$ ja laske $||B||_2$.

4. a) Olkoon $a_n = C_1\cos(n\pi/2) + C_2\sin(n\pi/2)$, missä C_1 ja C_2 ovat reaalisia vakioita ja $n \geq 0$. Määritä taulukon avulla Z-muunnos jonolle $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ja käänteismuunnos lausekkeelle $z/(z^2 - z - 6)$.
   b) Ratkaise Z-muunnoksen avulla differenssiyhtälö $b_{n+1} - b_n = -2\cos(n\pi/2)$, kun $b_0 = 1$. Vihje: Käänteimuuntamiseen auttaa a-kohta.

Z-muunnokseen liittyviä kaavoja

Määritelmä: Annettu jono $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} = (a_0, a_1, \dots)$; sen Z-muunnos on funktio $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n/z^n = a_0 + a_1/z + \dots$.
Siirrot: $T(a_n) = (a_{n-1}) = (0, a_0, a_1, \dots)$ siirto taaksepäin,
$E(a_n) = (a_{n+1}) = (a_1, a_2, \dots)$ siirto eteenpäin.
Olkoon $A(z) = Z(a_n)$ ja $B(z) = Z(b_n)$. Pätee:

$$Z(na_n) = -zA'(z),\ Z(c^n a_n) = A(z/c),$$

$$Z(E(a_n)) = Z(a_{n+1}) = z(A(z) - a_0),$$

$$Z(E^2(a_n)) = Z(a_{n+2}) = z^2(A(z) - a_0 - a_1/z),$$

$$Z(T(a_n)) = A(z)/z,\ Z(T^k(a_n)) = A(z)/z^k.$$

Muunnoksia:

(a_n)	$A(z) = Z(a_n)$
(1)	$z/(z-1)$
$T(1)$	$1/(z-1)$
(n)	$z/(z-1)^2$
(n^2)	$z(z+1)/(z-1)^3$
(α^n)	$z/(z-\alpha)$
$(n\alpha^n)$	$\alpha z/(z-\alpha)^2$
$(\cos(n\pi/2))$	$z^2/(z^2+1)$
$(\sin(n\pi/2))$	$z/(z^2+1)$
$(\sin(n\alpha))$	$z\sin\alpha/(z^2 - 2z\cos\alpha + 1)$
$(\cos(n\alpha))$	$z(z-\cos\alpha)/(z^2 - 2z\cos\alpha + 1)$