Teknillinen korkeakoulu Alestalo/Astola
Matematiikka

Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3, syksy 2000
1. välikoe 16.10.2000 klo 16-19

Vain funktiolaskimet ovat sallittuja!

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille
– opintojakson nimi ja päiväys, välikokeen numero
– opiskelijanumero+kirjain, sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet
– koulutusohjelma (Kem, Kon, Maa, Mak, Puu, Ryk)
– mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat
– nimikirjoitus

1. Matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot ovat 0, 1 ja 4 ja niitä vastaavat ominaisvektorit $[1,1,-1]^T$, $[1,0,0]^T$ ja $[5,3,3]^T$.
a) Selitä, miten ominais*arvot* saatiin. (1 piste)
b) Muodosta differentiaaliyhtälöryhmän $\overline{y}' = A\overline{y}$ yleinen ratkaisu. (1 p.)
c) Ratkaise b-kohdan yhtälöön liittyvä alkuarvotehtävä $\overline{y}(0) = [3,2,-2]^T$. (2 p.)
d) Etsi jokin yksittäisratkaisu epähomogeeniselle yhtälölle
$\overline{y}' = A\overline{y} - [2e^{2t}, 2e^{2t}, 2e^{2t}]^T$ käyttämällä sopivaa yritettä. (2 p.)

2. Tarkastellaan epälineaarista differentiaaliyhtälöryhmää

$$\begin{cases} y_1' = y_2 - 2y_1y_2 \\ y_2' = y_1 + 2y_1y_2. \end{cases}$$

a) Määritä systeemin kriittiset pisteet (eli tasapainotilat).
b) Suorita linearisointi kaikissa kriittisissä pisteissä ja tutki niiden stabiilisuutta.
c) Laske Eulerin menetelmän avulla likiarvo yhtälöihin liittyvän alkuarvotehtävän $\overline{y}(0) = [1,2]^T$ ratkaisulle hetkellä $t = 0{,}1$ käyttämällä yhtä askelta.

3. Muodosta seuraavien lausekkeiden Laplace-käänteismuunnokset:

$$\text{a)}\frac{s^2+1}{s^2(s^2+9)}, \quad \text{b)}\frac{e^{-5s}}{s^2-s}, \quad \text{c)}\frac{s+2}{s^2-4s+13}.$$

4. Ratkaise Laplace-muunnoksen avulla differentiaaliyhtälö $y'' + 4y' + 4y = u(t-2)$, kun $y(0) = y'(0) = 0$. Tässä u on Heavisiden askelfunktio.

Laplace-muunnoksiin liittyviä kaavoja

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $F = \mathcal{L}f$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$. Merkitään $u(t)$ = Heavisiden askelfunktio ja $\delta(t)$ = Diracin delta-funktio. Pätee:

$$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0), \quad (\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$(\mathcal{L}f^{(n)})(s) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\}(s) = \frac{1}{s}F(s), \quad \mathcal{L}\{tf(t)\}(s) = -F'(s),$$

$$\mathcal{L}(f * g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g), \text{ missä } (f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = (g * f)(t);$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s-a), \quad \mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s).$$

Muunnoksia:

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u(t-a)$	e^{-as}/s
1	$1/s$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$1/(s-a)$
$\sin\omega t$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
$\cos\omega t$	$s/(s^2+\omega^2)$
$\sinh at$	$a/(s^2-a^2)$
$\cosh at$	$s/(s^2-a^2)$