Teknillinen korkeakoulu Alestalo
Matematiikka

Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3
Tentti 28.1.2002 klo 16–20.

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Vain tavallisia funktiolaskimia saa käyttää.

Kemiallisen tekniikan matemaattiset menetelmät -kurssin tentti koostuu kolmesta ensimmäisestä tehtävästä. Koeaika on tällöin **kolme tuntia**.

1. Muodosta matriisille
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
joko Choleskyn LL^T-hajotelma tai Doolittlen LU-hajotelma. Ratkaise kyseistä hajotelmaa käyttämällä yhtälöryhmä $A\overline{x} = \overline{b}$, kun $\overline{b} = [2, 5, 2]^T$.

2. Ratkaise alkuarvotehtävä $\overline{y}' = A\overline{y}$, $\overline{y}(0) = [1, 1, 1]^T$, kun $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

3. Ratkaise Laplace-muunnoksen avulla alkuarvotehtävä
$y'' - 4y' + 4y = \delta(t-2)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

4. Funktio $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on 8-jaksollinen, parillinen ja $f(x) = -x$, kun $0 \le x < 4$. Piirrä funktion f kuvaaja ja määritä sen Fourier-sarja. Kirjoita erikseen näkyville sarjan kolme ensimmäistä nollasta poikkeavaa termiä.

5. Tutkitaan lämmön johtumista sivuiltaan eristetyssä sauvassa, jonka päät ovat pisteissä $x = 0$ ja $x = 1$. Sauvan molemmat päät pidetään koko ajan lämpötilassa 0 ja lämpötila toteuttaa yhtälön $u_t = c^2 u_{xx}$, missä $c = 1$.
Määritä sauvan lämpötila $u(x,t)$, kun alkuhetkellä pätee
$u(x,0) = 100\sin(\pi x) + 20\sin(2\pi x)$. Käytä muuttujien erottelua.

Laplace-muunnoksiin liittyviä kaavoja

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $F = \mathcal{L}f$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$. Merkitään $u(t)$ = Heavisiden askelfunktio ja $\delta(t)$ = Diracin delta-funktio. Pätee:

$$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0), \quad (\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$\mathcal{L}(f * g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g), \text{ missä } (f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = (g * f)(t);$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s-a), \quad \mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s).$$

Muunnoksia:

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u(t-a)$	e^{-as}/s
1	$1/s$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$1/(s-a)$
$\sin\omega t$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
$\cos\omega t$	$s/(s^2+\omega^2)$

Fourier-sarjoihin liittyviä kaavoja

Olkoon $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ paloittain jatkuva ja $2L$-jaksollinen. Silloin pätee (tietyssä mielessä)

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right),$$

missä kertoimilla on lausekkeet

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx \quad \text{ja} \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx,$$

kun $n \ge 1$, ja

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx.$$