Teknillinen korkeakoulu Alestalo
Matematiikka

Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3
Tentti 20.12.1999 klo 12-16

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille
– kurssin nimi: K3 **tai** P3
– päiväys
– opiskelijanumero+kirjain, sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet
– koulutusohjelma (K3: Kon, Ryk, Ark, Maa; P3: Kem, Mak, Puu)
– mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat
– nimikirjoitus

1. Olkoon $\overline{a} = [1,2,3,4]^T$, $\overline{b} = [1,0,3,0]^T$ ja $\overline{c} = [1,0,0,1]^T$.
   a) Voidaanko vektori $\overline{v} = [1,3,4,0]^T$ esittää vektoreiden $\overline{a}, \overline{b}$ ja $\overline{c}$ lineaarikombinaationa?
   b) Entäpä vektori $\overline{w} = [2,4,9,7]^T$?

2. Ratkaise Laplace-muunnoksen avulla alkuarvotehtävä $y'' + 5y' + 6y = u(t-1)$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$. Tässä u on Heavisiden askelfunktio.

3. Ratkaise alkuarvotehtävä
$$\begin{cases} y_1' = -2y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 + y_2 + 12, \end{cases}$$
   $y_1(0) = 0,\ y_2(0) = -1.$
   Vihje: Etsi ensin vastaavan homogeenisen yhtälöryhmän yleinen ratkaisu.

4. Muodosta matriisille
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
   joko Choleskyn LL^T-hajotelma tai Doolittlen LU-hajotelma. Ratkaise kyseistä hajotelmaa käyttäen yhtälöryhmä $A\overline{x} = \overline{b}$, kun $\overline{b} = [2,5,2]^T$.

5. Tarkastellaan ympyränmuotoista silmukkaa, jonka keskipiste on xy-tason origossa ja säde on 1. Silmukka on eristetty ulkomaailmasta ja sen lämpötilaa kuvaa funktio $u = u(\varphi, t)$, missä $\varphi \in \mathbf{R}$ on positiivisesta x-akselista vastapäivään mitattu kulma. Funktio u toteuttaa lämpöyhtälön $u_t = c^2 u_{\varphi\varphi}$ ja hetkellä $t = 0$ silmukan yläpuoli ($y > 0$ eli $0 < \varphi < \pi$) on vakiolämmössä 100 °C ja alapuoli ($y < 0$ eli $\pi < \varphi < 2\pi$) lämpötilassa -100 °C. Määritä silmukan lämpötila ajan kuluessa esimerkiksi seuraavien välivaiheiden avulla:
   a) Piirrä alkulämpötilan $u(\varphi, 0)$ kuvaaja, kun $\varphi \in \mathbf{R}$.
   b) Perustele jaksollisuus- ja parillisuus/parittomuusominaisuuksien avulla, miksi on luonnollista tehdä yhtälön ratkaisemiseksi yrite $u(\varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(n\varphi)$.
   c) Sijoita yrite yhtälöön ja ratkaise funktiot $T_n(t)$; lopullisten kertoimien määräämiseksi tarvitaan myös alkutilaa $u(\varphi, 0)$.
   d) Tarkista saamasi vastaus laskemalla lämpötilan raja-arvo, kun $t \to \infty$.

Fourier-sarjoihin liittyviä kaavoja

Olkoon $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ paloittain jatkuva ja $2L$-jaksollinen. Silloin pätee (tietyssä mielessä) $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$, missä kertoimilla on lausekkeet $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx$ ja $b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx$, kun $n \geq 1$, ja $a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$.

Laplace-muunnoksiin liittyviä kaavoja

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $F = \mathcal{L}f$, $F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$. Merkitään $u(t)$ = Heavisiden askelfunktio ja $\delta(t)$ = Diracin delta-funktio. Pätee:

$$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0), \quad (\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$\mathcal{L}(f * g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g), \text{ missä } (f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = (g * f)(t);$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s-a), \quad \mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s).$$

Muunnoksia:

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u(t-a)$	e^{-as}/s
1	$1/s$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$1/(s-a)$
$\sin \omega t$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
$\cos \omega t$	$s/(s^2+\omega^2)$
$\sinh at$	$a/(s^2-a^2)$
$\cosh at$	$s/(s^2-a^2)$