Mat-1.443 Matematiikan peruskurssi P 3 (=Y3)

Tentti 16.12. 1997 Apiola/Bingham

Katso “Kirjoita selvästi”-litania kääntöpuolelta.

Huom! *KeTeMa-kurssia Mat-1.131* mahd. suorittavat laskevat tehtävät $1, 2, 3, 6$, aikaa 3 tuntia.

1. Selvitä kaikki mahdollisuudet, joita homogeeniyhtälöllä $Ax = 0$ voi esiintyä, kun A on 3×5 matriisi. Esitä selvityksesi tueksi Gaussin eliminaatiolla saatavat muodot, joissa on tehty sarakepermutaatiot yksinkertaiseen perusmuotoon saattamiseksi.

   Käytä esitystä, jossa matriisin alkioina ovat symbolit $0, 1, \times$, missä

   - 0 tarkoittaa lukua 0,
   - 1 tarkoittaa $\neq 0$,
   - $\times$ tarkoittaa jompaa kumpaa (ts. "ei tiedetä/ei kiinnosta").

   Ilmoita kussakin tapauksessa matriisin rangi ja ratkaisuavaruuden dimensio (eli vapaiden parametrien lukumäärä).

2. Laske e^{At} matriiseille a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

3. Ratkaise vaimentamaton värähtelysysteemi

   $$my'' + ky = A_0 \sin \omega t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$$

   Laplace-muuntamalla yhtälö ja soveltamalla käänteismuunnoksen laskemisessa konvoluutiolausetta.

   Merkitse $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\quad A = \frac{A_0}{m}$. Oletetaan, että $\omega = \omega_0$ (resonanssi).

4. Tarkastellaan 10 pituusyksikön mittaista sauvaa, jonka materiaali on sellainen, että lämmönjohtumisyhtälön vakio $c^2 = 1$, ts. $u_t = u_{xx}$.

   Katkaistaan illalla sauva keskeltä kahtia ja sijoitetaan toinen puolisko kiehuvaan vesisäiliöön $100°C$ (muistetaan laittaa tarpeeksi vettä). Toinen puolisko laitetaan pakastinlokeroon $-20°C$. Seuraavana aamuna, ajanhetkellä $t = 0$, sauvanpuolikkaat temmataan lämpöeristeeseen, liitetään yhteen ja sijoitetaan vapaaksi jäävät päät jäävesisäiliöön $(0°C)$.

   Suorita vaiheittain muuttujanerotteluprosessi sauvan lämpötilafunktion määrittämiseksi. (Valmiiseen kaavaan sijoittaminen ei riitä.)

   Kuinka pitkän ajan kuluttua pakastimessa olleen sauvan palasen puolivälissä lämpötila tulee $0°C$:ksi ? Käytä tässä kahta ensimmäistä termiä sarjasta.

5. Kirjoita funktio $\cos z$ muotoon $u(x,y) + iv(x,y)$ ja osoita Cauchy–Riemannin yhtälöiden avulla, että $\cos z$ on koko kompleksitasossa analyyttinen funktio. Johda derivoimiskaava.

6. **Vain Ketema** Tarkastellaan alkuarvotehtävää

   $$y''' = -6y^4, y(1) = -1, y'(1) = -1, y''(1) = 2.$$

   (Huom: oikea puoli on “potenssiin 4”)

   Muunna yhtälö ensimmäisen kertaluvun systeemiksi ja suorita kaksi Euler-askelta, käyttäen askelpituutta $h = 0.2$.

   Suorita lisäksi yksi askel Heunin menetelmällä (kts. alla) käyttäen askelpituutta $h = 0.4$.

   Vertaa ratkaisuja tarkkaan ratkaisuun pisteessä $t = 1.4$. Tarkka ratkaisu on $y(t) = \frac{1}{t-2}$

Laplace–muunnokset

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $Lf = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ **Merk.** $u(t) = H(t)$=yksikköaskelfunktio .
$(Lf')(s) = sF(s) - f(0), \quad (Lf'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
t^k	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$$(Lf')(s) = sF(s) - f(0), \quad (Lf'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$(Lf^{(n)})(s) = s^nF(s) - s^{(n-1)}f(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

$$L\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s), \; L(f*g) = (Lf)(Lg), (f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = (g*f)(t)$$

$$L\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \quad L\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s), \quad L\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$$