Mat-1.443 Matematiikan peruskurssi P 3, syksy 1997

Apiola/Bingham

3. välikoe 16.12. 1997

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (AUT, TFY, TIK, TUO, SÄH, KON, KEM, MAK, PUU, RYK);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

1. Tarkastellaan alkuarvotehtävää
$$y''' = -6y^4, y(1) = -1, y'(1) = -1, y''(1) = 2.$$
(Huom: oikea puoli on "potenssiin 4")
Muunna yhtälö ensimmäisen kertaluvun systeemiksi ja suorita kaksi Euler-askelta, käyttäen askelpituutta $h = 0.2$.
Suorita lisäksi yksi askel samasta alkupisteestä $(t = 1)$ lähtien Heunin menetelmällä (kts. alla) käyttäen askelpituutta $h = 0.4$.
Vertaa ratkaisuja tarkkaan ratkaisuun pisteessä $t = 1.4$. Tarkka ratkaisu on $y(t) = \frac{1}{t-2}$

2. Olkoon $f(x) = \begin{cases} x, 0 < x < 1 \\ 1, 1 < x < 2 \end{cases}$. Muodosta f:n kosinisarja. Piirrä kuva funktiosta, jota sarja esittää välillä $[-2, 2]$.

3. Tarkastellaan 10 pituusyksikön mittaista sauvaa, jonka materiaali on sellainen, että lämmönjohtumisyhtälön vakio $c^2 = 1$, ts. $u_t = u_{xx}$.
Katkaistaan illalla sauva keskeltä kahtia ja sijoitetaan toinen puolisko kiehuvaan vesisäiliöön $100°C$ (muistetaan laittaa tarpeeksi vettä). Toinen puolisko laitetaan pakastinlokeroon $-20°C$. Seuraavana aamuna, ajanhetkellä $t = 0$, sauvanpuolikkaat temmataan lämpöeristeeseen, liitetään yhteen ja sijoitetaan vapaaksi jäävät päät jäävesisäiliöön $(0°C)$.
Suorita vaiheittain muuttujanerotteluprosessi sauvan lämpötilafunktion määrittämiseksi. (Valmiiseen kaavaan sijoittaminen ei riitä.)
Kuinka pitkän ajan kuluttua pakastimessa olleen sauvan palasen puolivälissä lämpötila tulee $0°C$:ksi ? Käytä tässä kahta ensimmäistä termiä sarjasta.

4. Kirjoita funktio $\cos z$ muotoon $u(x, y) + iv(x, y)$ ja osoita Cauchy–Riemannin yhtälöiden avulla, että $\cos z$ on koko kompleksitasossa analyyttinen funktio. Johda derivoimiskaava.

Kaavoja

Diff.yhtälöiden numeriikkaa

Heunin menetelmä $y^*_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad y(t_0) = y_0$
$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y^*_{n+1}))$.
GKV $= O(h^2)$

Fourier-kaavoja

Yleinen tapaus, f määritelty välillä $(-L, L)$

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$
$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$

Puolen jakson laajennukset, f määritelty välillä $(0, L)$

Sinisarja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

Kosinisarja

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$