Mat-1.443 Matematiikan peruskurssi P 3, syksy 1997

Apiola/Bingham

2. välikoe 17.11. 1997

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (AUT, TFY, TIK, TUO, SÄH, KON, KEM, MAK, PUU, RYK);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

1. Ratkaistavana on yhtälön

$$f(x) = \int_0^x \frac{e^{-(1/2)\,t^2}}{\sqrt{2\pi}} dt - 0.45 = 0$$

välillä $(0,2)$ oleva juuri.

Funktion f arvojen laskemiseksi tarvitaan numeerista integrointikaavaa, derivaatan arvothan saadaan suoraan.

- a) Laske yksi Newtonin iteraatioaskel lähtien alkuarvosta $x_0 = 1$ ja käyttämällä approksimointiin Simpsonin kaavaa, jossa $n = 6$. Kuinka suuri on tällöin funktion arvon laskennassa tehty virhe korkeintaan?
- b) Kuinka suuri n tulee tästä jatkettaessa (ainakin Newton-iteraation lopussa) valita Simpsonissa, jotta nollakohdan virhe olisi $< 10^{-5}$. Vihje: Koska nimittäjässä olevat derivaatan arvot ovat vähintään luokkaa 0.1 nollakohdan lähistöllä, kuten laskemalla tai piirtämällä nähdään, niin Newtonin iteraatiokaavassa olevat funktion arvojen virheet tulevet kerrotuksi korkeintaan 10:llä, joten Simpsonissa on syytä ottaa virherajaksi 10^{-6}.

Laskutyön ja muistamisen helpottamiseksi:

Simpson-kaavat on annettu paperin lopussa. Newtonin voit johtaa asiaa havainnollistavasta graafisesta esityksestä, jos olet unohtanut.

Maple-istunto auttaa tarvittavassa 4. derivaatan laskussa:

```
> d1f:=(1/sqrt(2*Pi))*exp(-x^2/2):
> d4f:=normal(diff(d1f,x$3)):
> evalf(minimize(d4f,{x},0..2));evalf(maximize(d4f,{x},0..2));

                              -.5505878395
                              .5505878395
> plot(d4f,x=0..2);  # Kuva jääköön kuviteltavaksi
> plot(d1f,x=0..2);  # Samoin, tässä se mainittu 1. derivaatan katselmus.
```

2. Vaimennetun heilurin yhtälö on

$$\Theta'' + c\Theta' + k\sin\Theta = 0$$

- a) Kirjoita se 1. kertaluvun systeemiksi ja määritä kriittiset pisteet (KRP:t) sekä linearisoiva matriisi niissä.
- b) Millä (k:ta ja c:tä koskevalla) ehdolla syntyy kriittinen vaimennus (ali- ja ylivaimennuksen rajatila) stabiilissa KRP:ssä?
- c) Määritä alivaimennetussa tapauksessa kriittisten pisteiden (2 erilaista) tyyppi.

3. Määritä yleinen reaalinen ratkaisu systeemille $y' = Ay$, kun $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Hahmottele faasiavaruuskäyrää $(y_1(t), y_2(t), y_3(t))$, jossa alkupiste valitaan läheltä reaalista ominaisvektoria ja selvitä, onko origo stabiili vai epästabiili kriittinen piste?

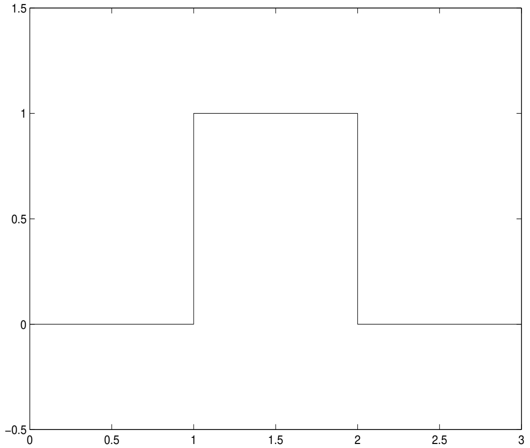
Muuten, Maple-komento

`> factor(det(A-lambda*diag(1,1,1)));` antaa $(\lambda - 2)\left(\lambda^2 - 2\,\lambda + 2\right)$

4. Ratkaise alkuarvotehtävä $y'' + y' + 2y = r(t), \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$ kun r(t) on oheisen kuvan mukainen.
Huom:
Muotoa $\frac{1}{s\,Q(s)}$ olevalle lausekkeelle, jossa Q(s) on toisen asteen polynomi, jolla ei ole reaalisia nollakohtia, kannattaa etsiä muotoa $\frac{A}{s} + \frac{B\,s + C}{Q(s)}$ oleva osamurtohajoitelma.

Numeerinen integrointi Simpsonilla

Simpsonin kaava : $\frac{h}{3}S$, missä S on painotettu summa funktion arvoista jakopisteissä. Painot ovat $1, 4, 2, 4, 2, \ldots, 4, 1$.



Kuva 1: Tehtävän 4 heräte r(t)

Integroimisväli jaetaan parilliseen määrään h:n mittaisia "pikkuvälejä".

Virhearvio: $\frac{h^4(b-a)|f^{(4)}(\xi)|}{180}, \xi \in [a,b]$,

Laplace-muunnoksia

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $Lf = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ **Merk.** $u(t) = H(t)$=yksikköaskelfunktio .

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
t^k	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$$(Lf')(s) = sF(s) - f(0), \quad (Lf'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$(Lf^{(n)})(s) = s^nF(s) - s^{(n-1)}f(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

$$L\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s), \ \ L(f{*}g) = (Lf)(Lg), (f{*}g)(t) = \int_0^t f(t{-}\tau)g(\tau)d\tau = (g{*}f)(t)$$

$$L\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \quad L\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s), \quad L\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$$

$\delta(t-a)$ tarkoittaa *Dirac'n* δ:aa.