Mat-1.443 Matematiikan peruskurssi P 3, syksy 1997

Apiola/Bingham

1. välikoe 13.10. 1997

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (AUT, TFY, TIK, TUO, SÄH, KON, KEM, MAK, PUU, RYK);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

1. Osoita, että vektorit $(5,-1,2), (2,0,1), (1,-1,1)$ ovat lineaarisesti riippumattomat (ja siten muodostavat $\mathbb{R}^3$:n kannan) ja määritä vektorin $(1,1,1)$ koordinaatit tässä kannassa.

2. Selvitä kaikki mahdollisuudet, joita homogeeniyhtälöllä $Ax = 0$ voi esiintyä, kun A on 3×5 matriisi. Esitä selvityksesi tueksi Gaussin eliminaatiolla saatavat muodot, joissa on tehty sarakepermutaatiot yksinkertaiseen perusmuotoon saattamiseksi.

   Käytä esitystä, jossa matriisin alkioina ovat symbolit $0, 1, \times$, missä

   - 0 tarkoittaa lukua 0,
   - 1 tarkoittaa $\neq 0$,
   - $\times$ tarkoittaa jompaa kumpaa (ts. "ei tiedetä/ei kiinnosta").

   Ilmoita kussakin tapauksessa matriisin rangi ja ratkaisuavaruuden dimensio (eli vapaiden parametrien lukumäärä).

3. a) **(2 p.)**
   Laske matriisin $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ominaisarvot ja -vektorit.

   b) **(1 p.)**
   Tulkitse matriisin määräämä lineaarikuvaus geometrisesti.

   c) **3 p.** Selvitä alla olevien Maple-tuloksien avulla (tai jos haluat, niin ilmankin), mitkä ovat matriisin $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ ominaisarvot sekä niiden algebralliset ja geometriset kertaluvut. Onko matriisi diagonalisoituva?

```
> A:=matrix(4,4,[2,-1,2,0,0,3,-1,0,0,1,1,0,0,1,-3,5]):
> Cmat:=evalm(A-lambda*diag(1,1,1,1));
```

$$Cmat := \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

```
> factor(det(Cmat));
```

$$(\lambda-2)^3(-5+\lambda)$$

```
> Cmat1:=subs(lambda=5,op(Cmat)):Cmat2:=subs(lambda=2,op(Cmat)):
> op(Cmat1),op(Cmat2);
```

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> map(gausselim,["]);
```

$$\left[\begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-9}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right]$$

KÄÄNNÄ

4. a) **3 p.** Määritä Markovin matriisin $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ominaisarvot ja suurinta ominaisarvoa vastaava ominaisvektori. Perustele, miksi A:n ominaisvektoreista voidaan muodostaa $\mathbb{R}^3$:n ortonormaali kanta.

b) **3 p.** Suoritetaan iteraatio $u_0 = (-1, 1, 2)^T$, $u_{n+1} = Au_n, n = 0, 1, 2, ...$
Määritä rajavektori, jota kohti näin saatu jono suppenee.
Vihje: Tässä riittää tuntea tuo edellä laskemasi ominaisvektori, kun tiedetään lisäksi ortonormaalin ominaisvektorikannan olemassaolo.