Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3, syksy 1998

Apiola/Kaila

3. välikoe 15.12. 1998

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (AUT, TFY, TIK, TUO, SÄH, KON, KEM, MAK, PUU, RYK);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

1. Ratkaise alkuarvotehtävä $2y'' + y' + 2y = \delta(t-5), \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$, missä δ tarkoittaa Diracin deltaa. Tässä siis massa-jousisysteemiin kohdistuu hetkellä $t = 5$ yhden impulssiyksikön suuruinen "vasaranisku".

   Hahmottele ratkaisukäyrän kulku välillä $[0, 20]$. (Ainakin 0-kohtien sijainnit on hyvä/helppo asetella kohtalaisen tarkasti.)

   Vihje: Muistathan, että nimittäjässä olevalle toisen asteen polynomille kannattaa usein tehdä neliöksi täydentäminen.

2. Olkoon funktio f määritelty reaaliakselin välillä $x \in [0, 2]$ asettamalla $f(x) = 1 - u(x-1), \quad 0 \le x \le 2$, missä u on Heavisiden funktio.

   Piirrä funktion f parillinen jatko välillä $[-2, 2]$ ja kehitä se Fourier-sarjaksi, jonka jaksona on 4.

   Mitä arvoa kohti sarja suppenee, kun $x = 1$? Kirjoita tulos yhtälön muotoon. Voit hyvin tarkistaa laskemalla laskimellasi äärellisiä osasummia.

3. Sivuiltaan lämpöeristetyn π:n pituisen sauvan päät pidetään 0°C:ssa. Sauvan alkulämpötila noudattaa funktiota $f(x) = x, \quad 0 < x < \pi$.

   Ratkaise lämpötilafunktio $u(x, t)$ sijoittamalla aluksi yrite $u(x, t) = F(x)G(t)$ lämpöyhtälöön $u_t = c^2 u_{xx}$ ja jatkamalla siitä tavanomaisen muuttujanerotteluprosessin kautta sarjamuotoiseen ratkaisuun. (Annamme lämmönjohtumiskertoimen c olla symbolisessa muodossa.)

   Kirjoita eksplisiittisesti näkyviin ratkaisusarjan 3 ensimmäistä termiä.

4. *Heunin menetelmässä* edetään alkupisteestä (t_n, y_n) askeleen h verran suuntaan, joka saadaan ratkaisukäyrän tangenttien kulmakertoimien keskiarvona, kun tangentit muodostetaan askeleen alku- ja loppupisteissä. Koska loppupistearvoa y_{n+1} ei tunneta, lasketaan ensin sille approksimaatio y^*_{n+1} *Eulerin askeleen* avulla, ts. etenemällä alkupistetangentin suuntaan.

   a) (**3 p.**) Kirjoita Heunin menetelmä kaavan muodossa.

   b) (**3 p.**) Tulkitse Heunin kaavassa sopivat asiat vektoreiksi ja laske yksi "Heun-askel" alkuarvotehtävälle

   $$\begin{cases} y_1' = y_1 - 4y_2 \\ y_2' = -y_1 + y_2 \\ y_1(0) = 1, y_2(0) = 0 \end{cases}$$

   käyttäen askelpituutta $h = 0.2$.

   Huom! Jos sotkeudut jostain syystä a)-kohdassa, saat pari lohdutuspistettä laskemalla b)-kohdan Eulerin menetelmällä.

Laplace–muunnokset

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $Lf = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ **Merk.** $u(t) = H(t)$=yksikköaskelfunktio, eli *Heavisiden funktio* .

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
t^k	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$$(Lf')(s) = sF(s) - f(0), \quad (Lf'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$(Lf^{(n)})(s) = s^nF(s) - s^{(n-1)}f(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

$$L\{\textstyle\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s), \ L(f*g) = (Lf)(Lg), (f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = (g*f)(t)$$

$$L\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \ L\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s), \ L\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$$

Fourier-kaavoja, f määritelty välillä $(-L, L)$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^\infty b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$
$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^L f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

Puolen jakson laajennukset saadaan näistä helposti.

Hauskaa ja rentouttavaa joululomaa ja uutta intoa vuodelle 1999!