Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3, syksy 1998

Apiola/Kaila

2. välikoe 9.11. 1998

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (AUT, TFY, TIK, TUO, SÄH, KON, KEM, MAK, PUU, RYK);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

1. Eräässä koesarjassa tutkittiin puolijohdeliitoksen kapasitanssin riippuvuutta jännitteestä ja saatiin seuraava taulukko:

jännite	25 V	12.5 V	5 V	2.5 V
kapasitanssi	1 nF	2 nF	5 nF	10 nF

   a) **4 p** Muodosta näiden arvojen perusteella interpolaatiopolynomi kapasitanssille ja laske sen avulla jännitettä 18.5 V vastaava kapasitanssi. Voit käyttää joko *Lagrangen* tai *Newtonin* interpolaatiomenetelmää.
   b) **2 p** Tulos ei kenties vastaa datan perusteella syntyvää mielikuvaa. Minkäasteisia pienimmän neliösumman polynomeja tähän dataan voitaisiin sovittaa? Selvitä PNS-polynomisovituksen periaate muotoilemalla se sopivasti minimointitehtäväksi.

2. Kilpa-autoilija *Mika Häkkinen* kävi voitonjuhlien jälkeen testailemassa ajokkiaan uutta kauttaa silmällä pitäen. Hänen nopeutensa mitattiin tutkalla 6 s välein. Alla olevassa taulukossa on aika mitattuna ratakierroksen alusta lähtien loppuun saakka sekunneissa ja nopeus kullakin ajanhetkellä (km/h). Ratakierrokseen kuluva aika oli siis 84 s.

```
Aika    0    6  12  18  24  30  36  42  48  54  60  66  72  78  84
Nopeus 248  268 296 312 294 266 242 218 198 170 156 178 208 232 246
```

   Miten pitkä oli ratakierros ?

   Oletetaan, että *Häkkisen* ajotapa oli niin "sileä", että kiihtyvyyden kolmas derivaatta oli koko ajan itseisarvoltaan alle $0.2\ m/s^5$. Arvioi yläraja virheelle, kun mittaus- ja pyöristysvirheet jätetään huomioonottamatta.

(Huom: Tehtävän laatija ei ole formula-asiantuntija, joten aineisto ei välttämättä vastaa kovin hyvin todellisuutta).

3. Kaksi säiliötä, A ja B sisältää $50l$ nestettä kumpikin. Niitä yhdistää kaksi putkea siten, että $A \to B$ virtaa nestettä nopeudella 4 l/min ja $B \to A$ 1 l/min ja oletetetaan, että neste sekoittuu heti. Puhdasta vettä virtaa säiliöön A nopeudella 3 l/min ja säiliöstä B poistuu nestettä niinikään nopeudella 3 l/min. Oletetetaan, että alkuhetkellä säiliö A sisältää 25 kg suolaa ja säiliö B pelkkää vettä. Määritä suolamäärät kummassakin säiliössä ajan funktiona. Hahmottele sekä aikariippuvuuskuva (molemmat ratkaisukäyrät ajan funktiona) että faasitasokuva.

```
3 l/min

----------          ----------
-->       |         |         |
--        |_________|         |
 |         4 l/min ->         |
 |        -----------         |
 |        |         |         |
 |    A   |         |    B    |
 |        |---------|         |
 |         <-- 1 l/min        |
 |        |---------|         ----
 |________|         | ____________-> 3 l/min
```

4. Kirjoita vapaan vaimennetun värähtelyn yhtälö

$$x'' + cx' + kx = 0$$

   ($m = 1$) ensimmäisen kertaluvun systeemiksi. Olkoon A tämän systeemin matriisi.

   Tarkastellaan seuraavassa yksinomaan **kriittisen vaimennuksen** tapausta.

   Lausu vaimennusvakio c jousivakion k avulla ja laske A:n ominaisarvo.

   Oletetaan, että $c = 2$. Määritä alkuarvotehtävän $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(0) = [0, 1]$ ratkaisu ja piirrä se faasitasoon.

Kaavakokoelma kääntöpuolella

Kaavakokoelma

Tässä on joukko yleishyödyllisiä kaavoja ja periaatteita. Jotkut niistä saattavat olla hyödyksi koetehtävissä (eivät varmaankaan kaikki tällä kertaa).

Numeerinen integrointi

Puolisuunnikas- eli trapetsikaava

$$\int_a^b f(x)dx = h(1/2f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + 1/2f(b)) + R,$$

missä $h = \frac{b-a}{n}$ ja

$R = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi), \xi \in (a,b)$.

Simpsonin kaava

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 4f(x_{2n-1}) + f(b)) + R,$$

missä n on parillinen ja $h = \frac{b-a}{2n}$ (ts. h on integrointiosavälin $[x_k, x_{k+2}]$ puolikas.),

$R = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi), \xi \in (a,b)$.

Gaussin kaavat

Periaaate: Valitaan solmut ja kertoimet niin, että mahdollisimman korkea-asteiset polynomit integroituvat tarkkaan.

Lineaariset vakiokertoimiset dy-systeemit

Kompleksinen yksinkertainen ominaisarvo

Valitaan toista ominaisarvoa $\lambda = \alpha + i\beta$ vastaava ominaisvektori $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$. Ratkaisu on muotoa

$$\mathbf{y} = e^{\alpha t}(a \cos \beta t + b \sin \beta t)\mathbf{u} + e^{\alpha t}(b \cos \beta t - a \sin \beta t)\mathbf{v}$$

Ei-diagonalisoituva matriisi

Cayley-Hamiltonin lause: Matriisi toteuttaa oman karakteristisen yhtälönsä. Tästä seuraa, että $A - \lambda I$ on eräässä ääritapauksessa nilpotentti, mikä tekee matriirieksponenttifunktion e^{At} laskemisen helpoksi.

Joissakin tapauksissa voidaan kokeilla muotoa $y_2 = te^{\lambda t}\mathbf{x} + e^{\lambda t}\mathbf{u}$ olevaa yritettä toisen LRT ratkaisun löytämiseksi, missä $\mathbf{x}$ on ominaisvektori.