Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3, syksy 1998

Apiola/Kaila

1. välikoe 12.10. 1998

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (AUT, TFY, TIK, TUO, SÄH, KON, KEM, MAK, PUU, RYK);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

1. Osoita, että vektorit $\mathbf{e}_1 = (2,1,3), \mathbf{e}_2 = (1,-2,0), \mathbf{e}_3 = (6,3,-5)$ ovat lineaarisesti riippumattomat. Esitä vektori $\mathbf{v} = (0,1,5)$ lineaarikombinaationa: $\mathbf{v} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3$.

2. Tarkastellaan lineaarista yhtälösysteemiä $Ax = B$, missä A on 3×6 matriisi. Selvitä, millainen Gaussin rivioperaatioiden jälkeinen liitännäismatriisin muoto $[\tilde{A}, \tilde{b}]$ johtaa 4-ulotteiseen ratkaisuavaruuteen (ts. 4 vapaata parametriä). Mikä on tällöin kerroinmatriisin A rangi?

   Esitä perustelusi tueksi Gaussin eliminaatiolla saatava muoto, jossa on tehty sarakepermutaatiot yksinkertaiseen perusmuotoon saattamiseksi.

   Käytä esitystä, jossa matriisin alkioina ovat symbolit $0, 1, \times$, missä

   - 0 tarkoittaa lukua 0,
   - 1 tarkoittaa $\neq 0$,
   - $\times$ tarkoittaa jompaa kumpaa (ts. "ei tiedetä/ei kiinnosta").

3. Määritä matriisin A ominaisarvot ja -vektorit. Selvitä kunkin ominaisarvon algebrallinen ja geometrinen kertaluku. Onko matriisi diagonalisoituva?

   Voit halutessasi hyödyntää alla olevaa Maple-istuntoa.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

```
> A:=matrix(4,4,[2,-1,2,0,0,3,-1,0,0,1,1,0,0,1,-3,5]):
> Cmat:=evalm(A-lambda*diag(1,1,1,1));
```

$$Cmat := \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

```
> factor(det(Cmat));
```

$$(\lambda - 2)^3\,(-5 + \lambda)$$

```
> Cmat1:=subs(lambda=5,op(Cmat)):Cmat2:=subs(lambda=2,op(Cmat)):
> op(Cmat1),op(Cmat2);
```

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> map(gausselim,["]);
```

$$\left[\begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-9}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right]$$

4. Laske A^{1999}, kun

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$