Funktionaalianalyysiä

Merkitään

$$\|u\|_{L^2([0,\ell])} := \left(\int_0^\ell u(x)^2 dx \right)^{1/2}$$

$$L^2([0,\ell]) := \{ u \mid u : [0,\ell] \to \mathbb{R} \text{ mitallinen}, \|u\|_{L^2([0,\ell])} < \infty \}.$$

Käytämme lisäksi Sobolev-avaruutta

$$H_D^2([0,\ell]) := \left\{ u \in C^1([0,\ell]) \;\middle|\; \begin{array}{l} u(0) = u(\ell) = 0 \text{ ja} \\ u'(s) = u'(0) + \int_0^s f(x)dx,\ f \in L^2([0,\ell]) \end{array} \right\}$$

$$\|u\|_{H_D^2}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2 + \|u''\|_{L^2}^2,$$

Huom. $H_0^2 = \{ u \in H_D^2 \mid u'(0) = u'(\ell) = 0 \}$ ja $H_0^2 = \overline{C_0^\infty}$

sekä avaruutta

$$H_0^1([0,\ell]) = \left\{ u \in L^2([0,\ell]) \;\middle|\; u(x) = \int_0^x f(s)ds,\ f \in L^2([0,\ell]),\ u(0) = u(\ell) = 0 \right\},$$

$$\|u\|_{H_0^1}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2$$

<u>Lause</u> (Riesz'in esityslause): Olkoon H Hilbert-avaruus sisätulolla $(\cdot,\cdot)_H$ ja $F : H \to \mathbb{R}$ jatkuva lineaarinen kuvaus. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen $f \in H$, jolle

$$F(u) = (u, f)_H$$

kaikille $u \in H$.

<u>Yhtäjatkuvuus</u>: Funktioita $M \subset C[a,b]$ kutsutaan yhtäjatkuviksi, jos $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ s.e.

$$t_1, t_2 \in [a,b],\ |t_1 - t_2| \le \delta \Rightarrow |x(t_1) - x(t_2)| \le \varepsilon$$

Lause (Arzela-Ascoli) Olkoon $S \subset C([0,\ell])$ rajoitettuja yhtäjatkuvia funktioita. Tällöin S on suhteellisesti kompakti $C([0,\ell])$:ssä.

Erikoisesti jos $u_n \in S$ on jono, jolle

$$|u_n(x)| \leq C \quad \text{ja} \quad |u_n'(x)| \leq C, \quad \forall n,$$

niin on olemassa tasaisesti suppeneva osajono (u_{n_p}). Tästä seuraa Sobolevin upotuslause

Lause Upotus $H_D^2([0,\ell]) \to L^2([0,\ell])$ on kompakti.

Tod.

$$\underbrace{H_D^2 \longrightarrow C^1}_{\text{jatkuva}} \underbrace{\hookrightarrow}_{\text{kompakti}} \underbrace{C^0 \longrightarrow L^2}_{\text{jatkuva}} \qquad \square$$

Määrittelemme operaattorin

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x),$$

jonka määrittelyjoukko on $\mathcal{D}(A) = H_D^2([0,\ell])$

Lemma $A : \mathcal{D}(A) \to L^2([0,\ell])$ on jatkuva ja symmetrinen L^2-sisätulon suhteen ts. kaikille $u, v \in \mathcal{D}(A)$ pätee

$$(Au, v)_{L^2} = (u, Av)_{L^2}.$$

Tod. A on rajoitettu, joten se on myös jatkuva:

$$\|Au\|_{L^2} \leq \left\| \frac{d^2}{dx^2} u \right\|_{L^2} + C\|u\|_{L^2}$$

Symmetrisyys seuraa osittaisintegroinnista

$$\int_0^\ell (-u'' + qu) v \, dx = \Big/_0^\ell -u'v + \int_0^\ell (u'v' + quv) \, dx$$

$$= \Big/_0^\ell (-u'v + uv') + \int_0^\ell u \cdot (-v'' + qv) \, dx$$

sekä reuna-arvoista $u(0) = v(0) = u(\ell) = v(\ell) = 0$ □

Olkoon

$$B = A + c_0,$$

missä $c_0 > \sup |q(x)|$.

Lemma Operaattori

$$B : H^2_D([0,\ell]) \longrightarrow L^2([0,\ell])$$

on isomorfismi ts. jatkuva ja sillä on jatkuva käänteismuunnos.

Tod. Tarkastellaan yhtälöä

$$Bu = f, \quad f \in L^2([0,\ell])$$

Koska mielivaltaiselle $v \in H^2_D$ pätee

$$(Bu, v)_{L^2} = \int_0^\ell (-u'' + (q + c_0) u) v \, dx$$

$$= \int \left[u'v' + (q + c_0) uv \right] dx$$

ja $q(x) + c > 0$ kaikilla x, niin

$$c_1 \|u\|^2_{H^1_0} \leq (Bu, u)_{L^2} \leq c_2 \|u\|^2_{H^1_0}$$

joillakin $c_1, c_2 > 0$.

Siispä $(Bu,u)_{L^2}$ on ekvivalentti normi H^1_0:ssa ja $(u,v)_B := (Bu,v)_{L^2}$ on vastaavasti ekvivalentti (symmetrinen) sisätulo.

Rieszin esityslause $\Rightarrow$ on olemassa yksikäsitteinen u_0, jolle

$$F(v) = (v, u_0)_B,$$

missä $F: v \mapsto (f,v)_{L^2}$. Toisin sanoen

$$(f,v)_{L^2} = (Bu_0, v)_{L^2}$$

kaikilla $v \in L^2$. Tästä seuraa

$$Bu_0 = -u_0'' + (q+c_0)u_0 = f \in L^2, \quad u_0(0) = u_0(\ell) = 0,$$

ja edelleen $u'' \in L^2$ ja $u \in H^2_D$.

Lisäksi

$$(Bu,u)_{L^2} \geq \inf_{x\in[0,\ell]} (q(x)+c_0) \cdot \int_0^\ell u(x)^2 dx$$
$$\geq C_3 \|u\|^2_{L^2}$$

ja

$$(Bu,u)_{L^2} = (f,u)_{L^2} \leq \|u\|_{L^2} \cdot \|f\|_{L^2}$$

Siispä $\|u\|_{L^2} \leq C_3^{-1} \|f\|_{L^2}$

Lisäksi
$$\|v''\|_{L^2} \leq \|(q+c_0)u\| + \|f\|$$
$$\leq C\|f\|_{L^2}$$

joten

$$\|u\|_{H^2_D} \leq C\|f\|_{L^2}. \quad \square$$

<u>Lemma</u> Operaattori

$$B^{-1} : L^2([0,\ell]) \to L^2([0,\ell])$$

on kompakti ts. B^{-1} kuvaa rajoitetut joukot kompakteiksi.

<u>Tod.</u> $B^{-1} : L^2 \xrightarrow{\text{jva}} H^2_D \xhookrightarrow{\text{upotus = kompakti}} L^2$ $\square$

Selvästi $(Bf, g)_{L^2} = (f, Bg)_{L^2}$.

<u>Korollaari</u> B^{-1}:n ominaisarvot muodostavat jonon $\mu_n \to 0$ ja B^{-1}:n ominaisfunktiot muodostavat täydellisen ortonormaalin kannan avaruudessa $L^2([0,\ell])$

<u>Tod</u> Kompaktin itseadjungoidun operaattorin spektraaliteoria. [esim. Renardy, Rogers, Rudin etc] $\square$

Väite: Kuvaus $id: H^2_D \to C^1$ on rajoitettu.

Tod. $\|u\|_{C^1([0,\ell])} := \sup_{x\in[0,\ell]} |u(x)| + \sup_{x\in[0,\ell]} |u'(x)|$

Kuten todettu

$$|u(x)| = |\underbrace{u(0)}_{=0} + \int_0^x u'(s)ds| \leq |\int_0^\ell u'(s)ds| \leq \ell\left(\int_0^\ell (u'(s))^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C\|u\|_{H^2_D}.$$

Pitäisi arvioida termiä

$$|u'(x)| = |u'(0) + \int_0^x f(s)ds|$$

H^2_D-normilla. Nyt f on u:n heikko toinen derivaatta, joten

$$|u'(x) - u'(0)| = |\int_0^x f(s)ds| \leq C\|u\|_{H^2_D}$$

selvästi. Silloin

$$|u(x) - \underbrace{u(0)}_{=0}| = |\int_0^x u'(s)ds| \geq \int_0^x \left(u'(0) - C\|u\|_{H^2_D}\right) ds$$

ja edelleen asettamalla $x = \frac{1}{2}$

$$|u(\tfrac{1}{2})| \geq \tfrac{1}{2}u'(0) - \tfrac{C}{2}\|u\|_{H^2_D}$$

$$\Rightarrow |u'(0)| \leq \|u\|_\infty + \tfrac{C}{2}\|u\|_{H^2_D} \leq \tilde{C}\|u\|_{H^2_D}$$

$\Rightarrow$ väite $\square$