

Laskuharjoitus 1, 24.9.2008.

**Laskuharjoitus 1****1.1.** Olkoon  $G$  ryhmä ja  $x, y \in G$ . Todista:

- (a)  $(x^{-1})^{-1} = x$ .  
(b) Jos  $xy = e$ , niin  $y = x^{-1}$ .  
(c)  $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ .

**1.2.** Etsi (isomorfiavaile) kaikki ryhmät  $G$ , joille  $|G| = 6$ .**1.3.** Olkoon  $G$  ryhmä,  $|G| < \infty$ , ja olkoon  $\mathcal{F}(G)$  funktioiden  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  joukko (varustettuna luonnollisella  $\mathbb{C}$ -vektoriavaruusrakenteella). Olkoon

$$\int_G f \, d\mu_G := \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x),$$

kun  $f \in \mathcal{F}(G)$ . Varustetaan  $\mathcal{F}(G)$  sisätulolla

$$\langle f, g \rangle := \int_G f \bar{g} \, d\mu_G.$$

Olkoot  $\pi_L, \pi_R : G \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{F}(G))$  määritely

$$(\pi_L(y) f)(x) := f(y^{-1}x),$$

$$(\pi_R(y) f)(x) := f(xy).$$

Osoita, että  $\pi_L$  ja  $\pi_R$  ovat ekvivalenteja unitaariesityksiä.**1.4.** Olkoon  $G$  epäkommutatiivinen ja  $|G| = 6$ . Varustetaan  $\mathcal{F}(G)$  edellisen tehtävän sisätulolla ja olkoon  $\pi_L : G \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{F}(G))$  kuten edellä. Etsi  $\pi_L$ -invariantit aliavaruudet ja hae niille ortonormaalit kannat. (Vihje: tarkastele tasasivuisen kolmion symmetriaryhmää...)