Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

Mat-1.451 / Mat-1.1510 Svenskspråkig grundkurs i matematik 1

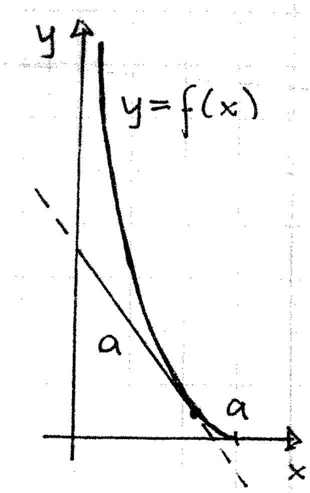
Tentamen, 5.9.2008

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

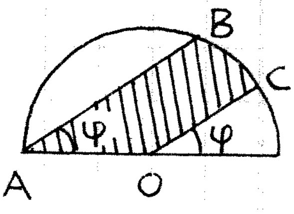
Ange TYDLIGT om det är Mat-1.451 (gamla Grundkurs 1, som förelästes sista gången hösten -04; 6sv) eller Mat-1.1510 (nya Grundkurs 1, som förelästes första gången hösten -05; 10sp) som ni skriver! Vid denna tentamen får varken räknare eller tabellsamlingar användas. Fråga, om ni misstänker att det förekommer något tryckfel!

1.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}$$

a) Beräkna $det(A)$. (2p.)
b) Beräkna $inv(A) = A^{-1}$. (2p.)
c) Lös ekvationssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$. (2p.)

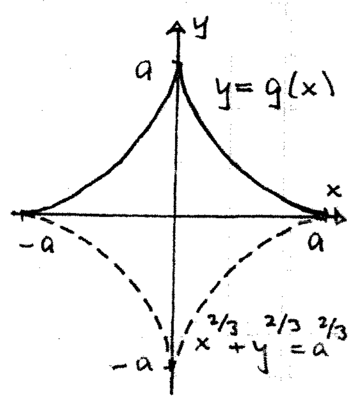


2. a) Visa att funktionen $f(x) = a \cdot \ln(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}) - \sqrt{a^2-x^2}, a > 0$ har derivatan $f'(x) = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$. (2p.)
b) Kurvan $y = f(x)$ med f från a)-delen kallas för en *traktris*, men är mera känd under namnet hundkurvan. Den uppstår då man går längs en rät linje (styrlinjen, y-axeln i den övre figuren till höger) och släpar en motsträvig hund efter sig i ett koppel med längden a. Visa att den delen av varje tangentlinje till kurvan, som begränsas av tangeringspunkten och y-axeln alltid har längden a. (4p.)



3. I en halvcirkel med radien 1, med medelpunkten O och med A som diameterns ena ändpunkt dras en korda AB och parallellt med den en radie OC. Hur stor är maximala arean hos området $OCBA$ (skuggat i den mittersta figuren till höger)?

4. Beräkna följande anti-derivator (obestämda integraler):
a) $\int (\tan(x))^{-1} dx = \int \cot(x) dx$ (3p.)
b) $\int \tan^{-1}(x) dx = \int \arctan(x) dx$ (3p.)



5. Vi studerar den övre halvan av asteroiden $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, a > 0$ i den nedre figuren till höger, som också kan ges som $y = g(x) = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$.
a) Då asteroid-halvan $y = g(x)$ roterar kring x-axeln, uppstår en rotationssymmetrisk yta. Beräkna arean hos denna yta. (3p.)
b) Beräkna volymen hos kroppen innanför ytan i a)-delen. (3p.)
(Kontrollmöjlighet: Om en kropp har volymen V och dess begränsningsyta har arean A, så är $A^3/V^2 \geq 36\pi$ med likhet endast om kroppen är ett klot.)

Nyttiga (?) formler:
$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2, a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$
$\cos^2 t + \sin^2 t = 1, \sin(2t) = 2 \sin t \cos t, \cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t$
$\Rightarrow \cos^2 t = (1 + \cos(2t))/2, \sin^2 t = (1 - \cos(2t))/2$