Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

Mat-1.451 / Mat-1.1510 Svenskspråkig grundkurs i matematik 1

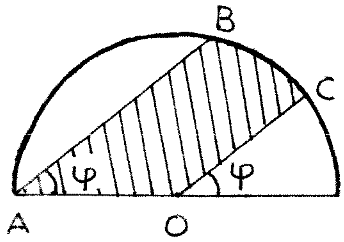
Tentamen 8.4.2006

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Ange TYDLIGT om det är Mat-1.451 (gamla Grundkurs 1, som förelästes sista gången hösten -04; 6sv) eller Mat-1.1510 (nya Grundkurs 1, som förelästes första gången hösten -05; 10sp) som ni tenterar!
Vid denna tentamen får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!

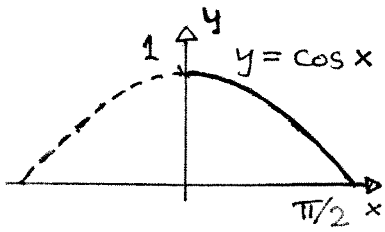
1. Betrakta följande påstående $P(n): 1+2+3+\ldots+(n-1)+n = \frac{1}{8}(2n+1)^2$
   a) Visa att 'induktionssteget' håller för alla $n \geq 1$, dvs. att om $P(k)$ är sant, så är även $P(k+1)$ sant.
   b) Visa att $P(n)$ trots detta är falskt för alla $n \geq 1$.

2. I en halvcirkel med radien 1, med medelpunkten O och med A som diameterns ena ändpunkt dras en korda AB och parallellt med den en radie OC. Hur stor är maximala arean hos området OCBA (skuggat i figuren)?



3. Beräkna följande anti-derivator (obestämda integraler):
   a) $\int (\tan x)^{-1} dx = \int \cot x dx$
   b) $\int \tan^{-1} x dx = \int \arctan x dx$

4. a) Då kurvan $y = \cos x, 0 \leq x \leq \pi/2$ roterar kring y-axeln, uppstår en rotationssymmetrisk yta. Sätt upp integralen som ger denna ytas area.
   b) Approximera denna area genom att approximera integralen med hjälp av trapetsmetoden eller Simpsons metod (ange klart och tydligt vilken metod som används), så att integrationsintervallet delas upp i två lika långa delintervall.



5. En differentialekvation på formen $a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$, där $a_2(x), a_1(x)$ och $a_0(x)$ är givna funktioner och $y(x)$ är den sökta funktionen, kallas för en 2:a ordningens linjär, homogen ordinär differentialekvation (ODE).
   a) Visa att om $y_1(x)$ och $y_2(x)$ är lösningar till en 2:a ordningens linjär, homogen ODE, så är även $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ en lösning för godtyckliga val av konstanterna C_1 och C_2.
   b) Om funktionerna a_2, a_1 och a_0 är *konstanter*, ger ansatsen $y(x) = e^{rx}$ alltid en lösning, om konstanten r väljes rätt. Vilka r-värden ger lösningar på formen $y(x) = e^{rx}$ till differentialekvationen $y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 0$?
   c) Kombinera a)- och b)-delen till att bestämma en lösning $y(x)$ till differentialekvationen $y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 0$, som satisfierar begynnelsevillkoren $y(0) = 8, y'(0) = 4$.