Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

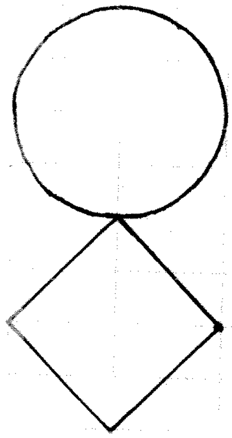
Metsalo

Mat-1.1510 Svenskspråkig grundkurs i matematik 1

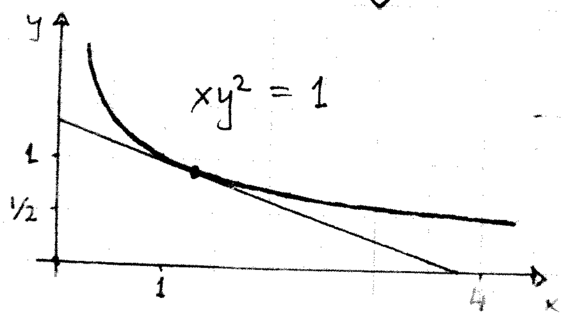
Mellanförhör nr 2, 2008-11-18

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Observera att olika (del-)uppgifter ger olika antal poäng!
Vid detta mellanförhör får varken räknare eller tabellsamlingar användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!



1. En silversmed har en silvertråd och vill av denna göra ett hängsmycke bestående av en cirkel och en under den hängande kvadrat genom att såga tråden i två delar, böja den ena delen till cirkeln, den andra delen till kvadraten och sedan löda ihop dem som i den övre figuren till höger. Vilket skall förhållandet mellan cirkelns diameter och kvadratens sida vara för att cirkelns och kvadratens sammanlagda area skall vara så liten som möjligt? (6p.)



2. Vi studerar kurvan $xy^2 = 1$ i 1:a kvadranten, där $x, y > 0$ (se den nedre figuren till höger).
   a) Vilken punkt på kurvan är närmast origo? (3p.)
   b) Vilken punkt på kurvan ger ett tangentlinjesegment mellan koordinataxlarna av minimal längd och hur långt är detta kortaste tangentlinjesegment? (3p.)
   c) Tangentlinjesegmentet och koordinataxlarna begränsar en rätvinklig triangel. Vilken punkt på kurvan ger ett tangentlinjesegment, som minimerar arean hos denna rätvinkliga triangel och hur stor är denna minimala area? (3p.)

3. Produkten $f \cdot g$ av två funktioner f och g definieras via $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. Visa att om f och g är differentierbara i punkten x_0, dvs. om $f'(x_0)$ och $g'(x_0)$ bägge existerar (vilket i sin tur medför, att f och g är kontinuerliga i x_0), så är även $f \cdot g$ differentierbar i x_0 och $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$. (Det är alltså deriveringsregeln för en produkt, som skall visas. Räkneregler för gränsvärden får antas vara kända.) (3p.)

4. Antag, att funktionen $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ satisfierar de två kraven $i) g'(0) = 1$ och $ii) g(x_1 + x_2) = g(x_1) \cdot g(x_2)$ för alla $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$. Visa att
   a) g är inte nollfunktionen (1p.)
   b) $g(0) = 1$ (1p.)
   c) $g'(x) = g(x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$ (2p.)
   d) $g(x) = \exp(x) = e^x$ för alla $x \in \mathbf{R}$ (2p.).
   Resultaten från de tidigare deluppgifterna får användas fritt vid lösningen av senare deluppgifter, även om man inte löst de tidigare deluppgifterna.
   (Dessa två krav ger alltså en alternativ definition av exponential-funktionen!)