Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

Mat-1.1510 Svenskspråkig grundkurs i matematik 1

Mellanförhör nr 1, 2008-10-14

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Observera att olika deluppgifter kan ge olika antal poäng!
Vid detta mellanförhör får varken räknare eller tabellsamlingar användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!

1. Mängden $\mathbf{C}$ består av alla reella 2×2-matriser på formen $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. Nollmatrisen O och identitetsmatrisen I tillhör mängden $\mathbf{C}$ och om matriserna A och B tillhör $\mathbf{C}$, så tillhör även matriserna $A+B$ och $-A$ mängden $\mathbf{C}$. Visa att
   a) mängden $\mathbf{C}$ är sluten under matrismultiplikation, dvs. att om matriserna A och B tillhör mängden $\mathbf{C}$, så tillhör även matrisen AB mängden $\mathbf{C}$. (2p.)
   b) matrismultiplikationen är kommutativ på mängden $\mathbf{C}$, dvs. att om matriserna A och B tillhör mängden $\mathbf{C}$, så är $AB = BA$. (2p.)
   c) om matrisen A tillhör mängden $\mathbf{C}$ och $A \neq O$ (nollmatrisen), så tillhör även matrisen A^{-1} mängden $\mathbf{C}$. (2p.)
   (Mängden $\mathbf{C}$ bildar faktiskt en kropp under operationerna matrisaddition och matrismultiplikation, men det behöver inte visas.)

2. a) Lös 2:a-gradsekvationen $iz^2 + (5-2i)z - (11+7i) = 0$. Redovisa mellanstegen (3p.)
   b) $w = (-1 + i\sqrt{3})/2$. Beräkna w^2, w^3 och w^{2008}. (1p.+1p.+1p.)

3. a) Vad menas med att en mängd vektorer i ett reellt vektorrum är linjärt oberoende? (2p.)
   b) Undersök om de fyra vektorerna (polynomen) $p_1(x) = x^3 + x^2, p_2(x) = x^2 + x, p_3(x) = x + 1$ och $p_4(x) = x^3 + 1$ i vektorrummet P_3 bestående av polynom av gradtal ≤ 3 är linjärt oberoende eller inte. (2p.)
   c) Kan $q(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ skrivas som en linjär kombination av p_1, p_2, p_3 och p_4? Motivera. (2p.)

4. Om det finns någon vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ sådan att $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ för något (reellt eller komplext) tal λ, säges $\vec{x}$ vara en *egenvektor* till den (kvadratiska) matrisen A, som hör till *egenvärdet* λ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

   a) Beräkna matrisen A:s determinant. (2p.)
   b) Visa att $\vec{x}$ är en egenvektor till matrisen A och bestäm egenvärdet, som den hör till. (2p.)
   c) -1 är ett egenvärde till A. Bestäm någon egenvektor, som hör till detta egenvärde. (2p.)