Aalto-universitetet

Gripenberg

Mat-1.1510 Grundkurs i matematik 1
Tentamen och mellanförhörsomtagning, 10.1.2013

Skriv ditt namn, nummer och övriga uppgifter på varje papper!
Räknare eller tabeller får **inte** *användas i detta prov!*

Skriv tydligt på varje papper vilket prov du avlägger,
Tentamensuppgifterna är 5 uppgifter av uppgifterna 2, 3, 6, 8, 9 och 11.
Mellanförhörsomtagningsuppgifterna är:
Mf 1: Uppgifterna 1, 2, 3 och 4
Mf 2: Uppgifterna 5, 6, 7 och 8
Mf 3: Uppgifterna 9, 10, 11 och 12.

1.

(a) Skriv det komplexa talet $\dfrac{4+7\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ i formen $a+b\mathrm{i}$ där $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Vad är det komplexa konjugatet av $\mathrm{e}^{\frac{5}{2}\pi\mathrm{i}}$?

2. Skär normalen till planet $x+2y+3z=2$ i punkten $(3,-2,1)$ x-axeln och om den gör det i vilken punkt?

3. Bestäm alla lösningar till följande ekvationssystem med hjälp av Gauss algoritm:

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & +4x_2 & & +6x_4 & = & 8 \\ -4x_1 & -7x_2 & +2x_3 & -12x_4 & = & -8 \\ 2x_1 & +7x_2 & +6x_3 & +8x_4 & = & 30 \\ -4x_1 & -9x_2 & -2x_3 & -8x_4 & = & -28 \end{array}$$

4. Antag att A och B är $n \times n$ matriser så att ingendera av dem är nollmatriser men $AB=0$. Förklara varför det följer av detta att $\det(A)=\det(B)=0$.

5. Bestäm matrisens $A = \begin{bmatrix} -10 & -6 \\ 18 & 11 \end{bmatrix}$ egenvärden och egenvektorer.

6. Antag att punkterna $(x_j, y_j) \in \mathbb{R}^2$, $j=1,2,\ldots,n$ är givna (och att $x_j \neq x_k$ då $j \neq k$) och man skall bestämma konstanterna c_1, c_2 och c_3 så att summan $\sum_{j=1}^{n} |c_1\mathrm{e}^{x_j} + c_2 + c_3\mathrm{e}^{-x_j} - y_j|^2$ är så liten som möjligt. Bestäm en matris A så att lösningen är $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}Y$ där $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$.

7. Utnyttja resultatet $3^3 = 27$ för att med linjär approximation uppskatta $\sqrt[3]{30}$.

VÄND!

8. Om man löser ekvationen $f(x) = 0$, där f är en viss två gånger deriverbar funktion, med hjälp av Newton-Raphsons metod så får man som resultat följande värden för punkterna x_n, $n = 0, 1, \ldots, 7$:

```
-2.0100  -2.0075  -2.0056  -2.0042  -2.0032
    -2.0024  -2.0018  -2.0013
```

Det ser alltså ut som om $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$. Vad kan du säga om $f(-2)$, $f'(-2)$ och $f''(-2)$? Motivera dina svar!

9. Använd partiell integrering för att räkna ut integralen $\displaystyle\int_0^2 t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

10. Beträffande funktionen f känner man till följande värden:

x	$f(x)$
1	0.4
1.4	0.6
1.6	0.6
2	1.0
2.4	0.8
3	0.6

Bestäm, på något förnuftigt sätt, en uppskattning av $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$. Observera att avstånden mellan de givna x-värdena inte alla är lika stora!

11.

(a) Lös ekvationen $y'(t) + 2y(t) = 6$, $y(0) = 2$.
(b) Lös ekvationen $y''(t) - 6y(t) + 9y(t) = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$.

12. Behållaren A innehåller 20 liter och behållaren B 40 liter saltvatten. Vid tidpunkten $t = 0$ är salthalten i behållaren A 2 g och i behållaren B 4 g salt per liter vätska. Till behållaren A pumpas med hastigheten 3 liter per minut vatten som innehåller 4 g salt per liter och 1 liter per minut från behållaren B. Vätskan i behållaren A blandas och 4 liter vätska pumpas per minut över till behållaren B. Till behållaren B pumpas också 1 liter rent vatten per minut, och av den väl blandade vätskan pumpas 1 liter per minut tillbaka till behållaren A och 4 liter per minut pumpas ut.

(a) Ge ett differentialekvationssytem ur vilket man kan lösa saltmängderna i behållarna, (men du behöver inte lösa systemet).
(b) Bestäm gränsvärdena av saltmängderna då $t \to \infty$ (men du kan anta att saltmängderna har gränsvärden).

VÄND!