

Mat-1.1510 Grundkurs i matematik 1
Tentamen och mellanförhörsoptagning 12.1.2012

Skriv ditt namn, nummer och övriga uppgifter på varje papper!
Räknare eller tabeller får **inte** användas i detta prov!

Skriv tydligt på varje papper vilket prov du avlägger,
Tentamensuppgifterna är 5 uppgifter av uppgifterna 2, 4, 6, 8, 10 och 11.
Mellanförhörsoptagningsuppgifterna är:
Mf 1: Uppgifterna 1, 2, 3 och 4
Mf 2: Uppgifterna 5, 6, 7 och 8
Mf 3: Uppgifterna 9, 10, 11 och 12.

1.

- (a) Antag att $w = 3 - i$. Skriv det komplexa talet $\frac{\bar{w} + 2i}{1 - i}$ i formen $a + ib$.
(b) Skriv de komplexa talen $e^{-3\pi i}$ och $e^{6\pi i}$ i formen $a + ib$.

2. Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{array}{cccccc} -x_1 & -4x_2 & +3x_3 & -6x_4 & = & -3 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & +4x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & +4x_2 & -x_3 & +10x_4 & = & 9 \\ 2x_1 & & +2x_3 & +4x_4 & = & 6 \end{array}$$

med hjälp av Gauss algoritm.

3. Antag att A och B är två $m \times m$ -matriser så att ingendera av dem är nollmatrisen men $AB = 0$. Förklara varför det följer av detta att $\det(A) = \det(B) = 0$. Följer det av villkoret $AB = 0$ att också $BA = 0$? (Visa detta eller ge ett motexempel.)

Ledning: Om tex. $\det(A) \neq 0$ så är A

4. Den reella och symmetriska 2×2 -matrisen A har determinanten 0, egenvärdet -5 och motsvarande egenvektor är $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$. Vad är det andra egenvärdet, motsvarande egenvektor och vad är A ?

Ledning: Om du inte lyckas bestämma det andra egenvärdet och motsvarande egenvektor kan du förklara hur du kunde bestämma A om du kände till alla egenvärden och egenvektorer.

5.

- (a) Är $\sup(A \cap B) = \min\{\sup(A), \sup(B)\}$?
(b) Uppnår funktionen $\frac{2}{(x-1)(2-x)}$ ett största och/eller minsta värde i intervallet $(1, 2)$?

Motivera dina svar!

6. En stegen som är 4 m lång lutar mot en lodrät vägg så att den nedre ändan av stegen befinner sig 1 m från väggen. Uppskatta med hjälp av linjär approximering och Pytagoras teorem hur mycket närmare väggen den nedre ändan av stegen skall flyttas om man vill att den övre ändan av stegen skall komma 2 cm högre upp.

7. När man skulle lösa ekvationen $f(x) = 0$, där f är åtminstone två gånger kontinuerligt deriverbar, med hjälp av Newton-Raphsons metod och startvärdet $x_0 = 3.2$ fick man följande resultat:

$$\begin{array}{lll} x_1 = 3.13333333333333 & x_2 = 3.08888888888889 & x_3 = 3.05925925925926 \\ x_4 = 3.03950617283951 & x_5 = 3.02633744855967 & x_6 = 3.01755829903978 \\ x_7 = 3.01170553269319 & x_8 = 3.00780368846212 & x_9 = 3.00520245897475 \\ x_{10} = 3.00346830598317 & x_{11} = 3.00231220398878 & x_{12} = 3.00154146932585. \end{array}$$

Det ser ut som om $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$ men vilka slutsatser kan man av dessa resultat dra om hur funktionen f uppför sig i närheten av punkten 3? Förklara hur du resonerat!

8.

(a) En vattentank innehåller 40 liter saltvatten i vilket det finns 2 g salt per liter vid tidpunkten $t = 0$. Till tanken pumpas med en hastighet av 3 liter per minut saltvatten som innehåller $\frac{1}{1+t}$ g salt per liter vid tidpunkten t . Av den väl omrörda blandningen pumpas 3 liter per minut ut (så att vätskemängden i behållaren hålls oförändrad). Låt $y(t)$ vara den totala mängden salt i behållaren vid tidpunkten t . Bestäm $y(0)$ och bestäm den differentialekvation som uppfylls av $y(t)$ (dvs. förklara hur du kommit fram till den). Du behöver inte lösa differentialekvationen.

(b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y''(t) + 7y'(t) + 12y(t) = 0$$

9. Beräkna Laplace-transformen, dvs. integralen $\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$, av funktionen f där $f(t) = t$ då $0 \leq t \leq 1$ och $f(t) = 0$ annars.

Ledning: Ett sätt är att integrera partiellt två gånger men man kan också tex. använda den andra förskjutningsregeln.

10. Beträffande en kontinuerlig funktion $f : [2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ känner man till följande värden:

x	2	2.4	2.8	3.0	3.2	3.6	4
f(x)	2.1	1.9	1.5	1.7	1.9	2.5	2.5

Hur kan man bestämma ett närmevärde för $\int_2^4 f(x) dx$? Observera att avstånden mellan de givna punkterna på x -axeln inte är lika långa. Du behöver inte räkna ut ett slutligt värde men ge ett uttryck som man enkelt kunde räkna ut med hjälp av en räknare.

11. Antag att $y(t)$ är lösningen till ekvationen $y'(t) + 3y(t - 2) = 1$ och $y(t) = -1$ då $t \leq 0$. Bestäm Laplace-transformen av $y(t)$.

Ledning: Då man räknar Laplace-transformen av termen $3y(t - 2)$ kan det vara skäl att dela upp integralen i två delar, den ena kan man räkna ut direkt eftersom $y(t) = -1$ då $t \leq 0$ och den andra kommer att innehålla Laplace-transformen av $y(t)$.

12. Om du skall räkna mod $(983^{567}, 1517)$ och i Matlab/Octave ger kommandot `mod(983^567, 1517)` får du som svar NaN. Förklara hur man kan räkna ut $\text{mod}(983^{567}, 1517)$ så att man i varje steg bara behöver räkna ut $\text{mod}(n, 1517)$ där n är något tal mellan 0 och $3 \cdot 10^6$. Du skall **inte** utföra räkningarna.