Aalto-universitetet

Gripenberg/Solin

Mat-1.1510 Grundkurs i matematik 1
Mellanförhör 3, 17.12.2012

Skriv ditt namn, nummer och övriga uppgifter på varje papper!
Räknare eller tabeller får **inte** *användas i detta prov!*

1. (4p) Vilken integral får man om man i integralen $\displaystyle\int_1^3 \cos(\sqrt{t})(1+t^2)\,\mathrm{d}t$ gör variabelbytet $t = x^2$? Du behöver (skall) inte räkna ut integralen.

Lösning: Om $t = x^2$ så är $\mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$, då $t = 1$ är $x = 1$ och då $t = 3$ är $x = \sqrt{3}$. Detta innebär att

$$\int_1^3 \cos(\sqrt{t})(1+t^2)\,\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt{3}} \cos(x)(1+x^4)2x\,\mathrm{d}x.$$

---

2. (3p) Är det sant att $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2+x+1}{x^2\sqrt{x}+4}\,\mathrm{d}x < \infty$? Motivera ditt svar men du behöver inte räkna ut integralen om svaret är ja.

Lösning: Om $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2\sqrt{x}+4}$ så kommer $f(x)$ för stora x att vara ungefär $\frac{x^2}{x^2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ (mera exakt $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}g(x)$ där $g(x) = \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2\sqrt{x}}}$ med $\lim_{x\to\infty} g(x) = 1$) och eftersom $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \infty$ (en följd av att $\frac{1}{2} < 1$ eller mera i detalj $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \Big/_1^\infty 2\sqrt{x} = -2 = \infty$) så gäller påståendet inte.

---

3. (3p) Visa genom att använda partiell integrering att om f är en (tex. begränsad och kontinuerlig) funktion vars Laplacetransform är $F(s)$ så är Laplacetransformen av funktionen $g(t) = \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ funktionen $\dfrac{1}{s}F(s)$.

Lösning: Med hjälp av partiell integrering får vi

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(g)(s) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t \\ &= \Big/_0^\infty \left(-\frac{1}{s}\right)\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \int_0^\infty \left(-\frac{1}{s}\right) f(t)\,\mathrm{d}t = 0 - 0 + \frac{1}{s}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s}F(s).\end{aligned}$$

---

4. (3p) Förklara varför $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{O(x^2)}{x} = 0$ medan gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{O(x^2)}{O(x)}$ inte nödvändigtvis existerar.

Lösning: $O(x^2)$ är en funktion $f(x)$ så att $|f(x)| \le C|x^2|$ för någon konstant C. Detta innebär att

$$\left|\frac{O(x^2)}{x}\right| \le C\frac{|x^2|}{|x|} = C|x|$$

och $\lim_{x\to 0}|x| = 0$ så att också $\lim_{x\to 0} \frac{O(x^2)}{x} = 0$ enligt instängningsprincipen.

Eftersom $|\sin(t)| \le |t|$ är $|\sin(x^3)| \le |x|$ då $|x| \le 1$ (och $|\sin(x^3)| \le 1 \le |x|$ då $|x| \ge 1$ men i detta fall när man räknar gränsvärden i 0 behöver man inte bry sig om vad som händer då $|x|$ är stor) så att $\sin(x^3) = O(x)$. Dessutom gäller $x^2 = O(x^2)$ eftersom $|x^2| \le |x^2|$ men gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin(x^3)}$ existerar inte eftersom $\lim_{x\to 0+} \frac{x^2}{\sin(x^3)} = +\infty$ och $\lim_{x\to 0-} \frac{x^2}{\sin(x^3)} = -\infty$.

---

5. (5p) Bestäm lösningen till differentialekvationen

$$y''(t) + 6y'(t) + 13y(t) = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 5.$$

Lösning: Den karakteristiska ekvationen (som man alltså får genom att försöka hitta en lösning i formen e^{rt}) är

$$r^2 + 6r + 13 = 0,$$

och lösningarna är

$$r = -3 \pm \sqrt{9 - 13} = -3 \pm 2\mathrm{i}.$$

Den allmänna lösningen är därför

$$y(t) = c_1\mathrm{e}^{-3t}\cos(2t) + c_2\mathrm{e}^{-3t}\sin(2t).$$

Då är $y'(t) = -3c_1\mathrm{e}^{-3t}\cos(2t) - 2c_1\mathrm{e}^{-3t}\sin(2t) - 3c_2\mathrm{e}^{-3t}\sin(2t) + 2c_2\mathrm{e}^{-3t}\cos(2t)$ så då vi sätter in initialvärdena får vi ekvationssystemet

$$\begin{aligned} -1 &= c_1 + c_2 \cdot 0, \\ 5 &= -3c_1 + 2c_2, \end{aligned}$$

och eftersom den första ekvationen ger $c_1 = -1$ följer det av den andra att $c_2 = 1$. Lösningen är därför

$$y(t) = -\mathrm{e}^{-3t}\cos(2t) + \mathrm{e}^{-3t}\sin(2t).$$

---

6. (3p) Antag att du skall bestämma lösningen till ekvationen

$$y''(t) + 7y'(t) + 12y(t) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}, \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

och ger följande kommando i `matlab` för att räkna ut lösningen $y(t)$:

```
syms s t, int((exp(-4*(t-s))-exp(-3*(t-s)))/(1+exp(s)),s,0,t)
```

I `maxima` är motsvarande kommando

```
integrate((exp(-4*(t-s))-exp(-3*(t-s)))/(1+exp(s)),s,0,t);
```

Får du rätt svar? Om inte, vad borde du skriva? Motivera ditt svar!

Lösning: Lösningen till ekvationen $y''(t) + 7y'(t) + 12y(t) = f(t)$ med initialvillkoren $y(0) = y'(0) = 0$ är $y(t) = \int_0^t g(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s$ där g är en lösning till ekvationen $y''(t)+7y'(t)+12y(t) = 0$ med initialvillkoren $g(0) = 0$ och $g'(0) = 1$.

Den karakteristiska ekvationen för differentialekvationen är

$$r^2 + 7r + 12 = 0,$$

och den har lösningarna

$$r = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49 - 4 \cdot 12}{4}} = \begin{cases} -3, \\ -4. \end{cases}$$

Funktionen g kan därför skrivas i formen

$$g(t) = c_1 \mathrm{e}^{-3t} + c_2 \mathrm{e}^{-4t}.$$

Då är $g'(t) = -3c_1 \mathrm{e}^{-3t} + 4c_2 \mathrm{e}^{-4t}$ så att initialvillkoren ger ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 0 &= g(0) = c_1 + c_2, \\ 1 &= g'(0) = -3c_1 - 4c_2 \end{aligned}$$

och lösningen blir $c_1 = 1$ och $c_2 = -1$.

Detta innebär att det givna kommandot inte ger lösningen $y(t)$ utan $-y(t)$ så det man borde skriva är

```
>syms s t, int((exp(-3*(t-s))-exp(-4*(t-s)))/(1+exp(s)),s,0,t)
```

eller

```
 integrate((exp(-3*(t-s))-exp(-4*(t-s)))/(1+exp(s)),s,0,t);
```

---

7. (3p) Av vad kan man dra slutatsen att differentialekvationssystemet

$$Y'(t) + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} Y(t) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix},$$

har ett gränsvärde då $t \to \infty$? Bestäm detta gränsvärde.

Lösning: Vi skall bestämma matrisens $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ egenvärden och räknar därför

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} (2-\lambda) & 3 \\ -1 & (2-\lambda) \end{bmatrix}\right) = 4 - 4\lambda + \lambda^2 + 3 = \lambda^2 - 4\lambda + 7.$$

Lösningarna till ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$ blir därför

$$\lambda = 2 \pm \sqrt{4 - 7} = 2 \pm \sqrt{3}\mathrm{i}.$$

Eftersom den reella delen av egenvärdena är positiv kommer lösningen $Y(t)$ till differentialekvationssystemet att ha ett gränsvärde $Y_\infty = \lim_{t\to\infty} Y(t)$ och detta gränsvärde är lösningen till ekvationen

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} Y_\infty = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Gränsvärdet blir därför

$$Y_\infty = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4+3} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
