Aalto-universitetet

Gripenberg/Solin

Mat-1.1510 Grundkurs i matematik 1
Mellanförhör 1, 16.10.2012

Skriv ditt namn, nummer och övriga uppgifter på varje papper!
Räknare eller tabeller får **inte** *användas i detta prov!*

1. (3p) Använd induktion (också om det finns andra sätt) för att visa att $2^n \geq n^2$ då $n \geq 4$.

Lösning: Då $n = 4$ gäller förstås $2^4 = 16 = 4^2$ och därför också $2^n \geq n^2$. Antag nu att påståendet gäller då $n = k$ (dvs. $2^k \geq k^2$) för något tal $k \geq 4$. Då är

$$2^{k+1} - (k+1)^2 = 2 \cdot 2^k - k^2 - 2k - 1 \geq 2k^2 - k^2 - 2k - 1,$$

eftersom vi antar att $2^k \geq k^2$ och därför får vi eftersom $k \geq 4$ att

$$2^{k+1} - (k+1)^2 \geq k^2 - 2k - 1 = k \cdot (k-2) - 1 \geq 4 \cdot 2 - 1 = 7 > 0,$$

dvs. påståendet $2^n \geq n^2$ gäller också då $n = k + 1$. Enligt induktionsprincipen följer nu påståendet för alla $n \geq 4$.

---

2. (3p) Skriv det komplexa talet $\dfrac{7+\mathrm{i}}{2 - \mathrm{i}e^{\pi \mathrm{i}}}$ i formen $a + b\mathrm{i}$ där a och b är reella tal.

Lösning: Eftersom $e^{\pi \mathrm{i}} = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi) = -1$ så får vi när vi förlänger med nämnarens konjugat

$$\frac{7+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}e^{\pi\mathrm{i}}} = \frac{7+\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} = \frac{(7+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{2^2+(-1)^2} = \frac{14-7\mathrm{i}+2\mathrm{i}-(-1)}{5} = \frac{15-5\mathrm{i}}{5} = 3 - \mathrm{i}.$$

---

3. (4p) Bestäm den punkt på linjen med ekvationen $\mathbf{r} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k} + t(2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$, $t \in \mathbb{R}$, som ligger närmast punkten $(2, 2, 0)$.

Lösning: Vektorn från punkten $(2, 2, 0)$ till en punkt på linjen är $(-\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k} + t(2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) - (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$. För att längden av denna vektor skall bli så liten som möjligt skall vektorn vara vinkelrät mot linjens riktningsvektor som är $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Detta ger villkoret

$$\Big(-3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k} + t(2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k})\Big) \cdot (2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = 0,$$

som är

$$-6 + 2 - 8 + t(4 + 4 + 16) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{2}.$$

Detta innebär att den punkt som efterfrågas har ortsvektorn $-\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k} + \frac{1}{2}(2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = \mathbf{0}$ så punkten är origo.

---

4. (6p) Använd Gauss algoritm för att bestämma alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & +2x_4 & = & 1 \\ -2x_1 & +4x_2 & -6x_3 & -x_4 & = & 4 \\ 4x_1 & -11x_2 & +15x_3 & +3x_4 & = & -9 \\ 2x_1 & -4x_2 & +6x_3 & +3x_4 & = & 0 \end{array}$$

Lösning: Med hjälp av Gauss algoritm får vi

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & -6 & -1 & 4 \\ 4 & -11 & 15 & 3 & -9 \\ 2 & -4 & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ r_2 \leftarrow r_2 + r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - 2r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 - r_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & -9 & 9 & -1 & -11 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ r_3 \leftarrow r_3 + 3r_2 \\ r_4 \leftarrow r_4 + r_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ r_4 \leftarrow r_4 - r_3 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eftersom det inte finns något pivot-element i den tredje kolumnen kan vi välja x_3 fritt, tex. $x_3 = s$. Från den tredje ekvationen $2x_4 = 4$ får vi $x_4 = 2$. Den andra ekvationen är $3x_2 - 3x_3 + x_4 = 5$ och därför blir $x_2 = \frac{1}{3}(5 - x_4 + 3x_3) = 1 + s$. Den första ekvationen är $2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_2 = 1$ och därför är $x_1 = \frac{1}{2}(1 - 2x_4 - 3x_3 + x_2) = \frac{1}{2}(1 - 4 - 3s + 1 + s) = -1 - s$. Alla lösningar kan nu skrivas i formen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

---

5. (3p) Bestäm arean av triangeln med hörn i punkterna $(-2, 3)$, $(1, 4)$ och $(2, -1)$ genom att uttrycka arean med hjälp av en determinant.

Lösning: Vektorn från punkten $(-2, 3)$ till $(1, 4)$ är $3\mathbf{i} + \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ och vektorn från samma punkt $(-2, 3)$ till $(2, -1)$ är $4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$. Av dehär vektorerna kan vi bilda matrisen $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ och arean av triangeln är hälften av arean av parallellogrammen med vektorerna som sidor så arean av triangeln blir

$$\frac{1}{2}\left|\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|3 \cdot (-4) - 4 \cdot 1\right| = \frac{1}{2}|-16| = 8.$$

6. (2p) Antag att A är en $m \times n$ matris som inte är nollmatrisen och B är en $m \times 1$ kolumnvektor. Ge två fall med antaganden beträffande A och/eller B i vilka man med säkerhet kan säga att det finns åtminstone en lösning till ekvationssystemet $AX = B$. (Svaret "Antag att det finns åtminstone en lösning ... " duger inte!)

Lösning: Tex. följande:

(a) Om $m = n$ och $\det(A) \neq 0$, dvs. om A är inverterbar så har ekvationen $AX = B$ åtminstone lösningen $A^{-1}B$ (och inga andra).

(b) Om $B = 0$ har ekvationen $AX = B$ åtminstone lösningen $X = 0$.

---

7. (3p) Antag att A och B är symmetriska $n \times n$-matriser där $n \geq 2$. Följer det av detta att AB är symmetrisk? Motivera ditt svar!

Lösning: Eftersom A och B är symmetriska så är $A^{\mathrm{T}} = A$ och $B^{\mathrm{T}} = B$. Nu är

$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = BA$$

och denna matris är lika med AB endast om $AB = BA$. Detta visar inte ännu att svaret är nej, endast att svaret är ja under tilläggsantagandet $AB = BA$. (Man skulle kunna tänka sig att detta var sant om A och B är symmetriska.)

För att få ett motexempel kan vi välja $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ så att A och B är symmetriska men $AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ är inte symmetrisk.

Svaret är alltså nej.