Aalto-universitetet Gripenberg/Solin
Mat-1.1510 Grundkurs i matematik 1
Tentamen och mellanförhörsomtagning 14.1.2010

Skriv ditt namn, nummer och övriga uppgifter på varje papper!
En räknedosa (godkänd för studentexamen) är ett tillåtet hjälpmedel i detta prov!

Skriv tydligt på varje papper vilket prov du avlägger,
Tentamensuppgifterna är 5 uppgifter av uppgifterna 2, 4, 6, 8,
10 och 11.
Mellanförhörsomtagningsuppgifterna är:
Mf 1: Uppgifterna 1, 2, 3 och 4
Mf 2: Uppgifterna 5, 6, 7 och 8
Mf 3: Uppgifterna 9, 10, 11 och 12.

1. Kontrollera om följande bevis för formeln $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n-1}{2(n+1)}$ är korrekt: Vi använder induktion och antar att påståendet gäller då $n = k$, dvs. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k-1}{2(k+1)}$. Vi visar att det också gäller då $n = k+1$ med hjälp av följande räkning där vi också använder induktionsantagandet:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k-1}{2(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\\ &= \frac{(k-1)(k+2)+2}{2(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+1)}{2(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)-1}{2((k+1)+1)}.\end{aligned}$$

Induktionssteget fungerar och därför är påståendet bevisat.

2.

(a) Använd Gauss metod för att bestämma en trappstegsform av den matris som beskriver ekvationssystemet

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +2x_2 & -3x_3 & +4x_4 & = & 5\\ -2x_1 & -4x_2 & +8x_3 & -5x_4 & = & -4\\ 3x_1 & +6x_2 & -5x_3 & +20x_4 & = & 28\\ -x_1 & -2x_2 & +7x_3 & +6x_4 & = & 9 \end{array}$$

Du behöver inte bestämma lösningarna till systemet.

(b) När man skulle lösa ett ekvationssystem fick man följande matris i trappstegsform:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 4 & -2 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bestäm alla lösningar till detta ekvationssystem

3. Bestäm matrisens $A = \begin{bmatrix} 46 & 36\\ -60 & -47\end{bmatrix}$ egenvärden och räkna ut en egenvektor för ett egenvärde (men du behöver inte räkna ut en egenvektor för det andra egenvärdet).

4. Antag att A är en sådan 2×2-matris att $A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & 3 \end{bmatrix}$. Vad är vinkeln mellan kolumnvektorerna i A?

5. Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + 2y^3 = 0$ i punkten $(1, 1)$. *Ledning: Använd implicit derivering.*

6. Förklara hur man med hjälp av Newton-Raphsons metod kan bestämma en approximation till en lösningt ill ekvationen $x^4 + 2x^3 = 1$ och räkna två steg med startvärdet $x_0 = 1$.

7. Bestäm med hjälp av linjär approximering hur mycket radien av en cirkel måste minska för att arean av området innanför cirkeln skall minska med 1 cm^2 om radien urskrungligen är 80 cm.

8. Ett par skidor som stått ute över natten har temperaturen $-25°$. Skidornas temperatur 30 minuter efter att de tagits inomhus är $-10°$. Hur länge räcker det ännu efter detta tills temperaturen i skidorna stigit till $0°$ om man antar att temperaturen uppfyller differentialekvationen $T'(t) = -k(T(t) - T_0)$ där $T_0 = 20°$ är temperaturen inomhus. Låt $y(t) = T(t) - T_0$ och lös den differentialekvation som $y(t)$ uppfyller.

9. Beräkna integralen $\int_0^1 t \ln(t)\, \mathrm{d}t$ genom att integrera partiellt.
Ledning: Då $a > 0$ *gäller* $\lim_{t \to 0+} t^a \ln(t) = 0$ *och det är en bättre ide att derivera logaritmfunktionen än att integrera den.*

10.

(a) (2p) Förklara vilken ide trapetsregeln för numerisk integrering bygger på.
(b) (4p) Beräkna en approximation av integralen $\int_2^3 f(t)\, \mathrm{d}t$ med hjälp av trapetsregeln då man vet att $f(2) = 1$, $f(2.2) = 1.5$, $f(2.4) = 2$, $f(2.6) = 2$, $f(2.8) = 2.5$, $f(3) = 3$. Varför är det inte en god ide att försöka använda Simpson regel?

11. Om $u(t) = 1$ då $t \geq 0$ och $u(t) = 0$ då $t < 0$ så gäller $f(t) = f(0) + (u * f')(t)$ då $t \geq 0$. Härled med hjälp av detta och det faktum att Laplace-transformen av en konvolution $g * h$ är produkten av Laplace-transformerna av g och h formeln för Laplace-transformen av f'.

12.

(a) (4p) Följande tillämpning av Euklides algoritm visar att sgd $(37, 30) = 1$:

$$\begin{aligned} 37 &= 1 \cdot 30 + 7 \\ 30 &= 4 \cdot 7 + 2 \\ 7 &= 3 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

Bestäm $[30]_{37}^{-1}$, dvs. ett tal k så att $1 \leq k < 37$ och $k \cdot 30 = 1 \pmod{37}$.

(b) (2p) När man använder RSA-metoden använder man den publika nyckeln (n, k) så att "meddelandet" a, som är ett tal mellan 0 och $n - 1$ krypteras till $b = \operatorname{mod}(a^k, n)$ och sedan kan mottagaren använda sin privata nyckel (n, d) för att dekryptera b till $a = \operatorname{mod}(b^d, n)$. Hur skall k och d väljas om n är en produkt av två primtal p och q för att detta skall fungera? (Du behöver inte visa att det faktiskt fungerar då.)