TKK, Institutionen för matematik och systemanalys Gripenberg/Solin
Mat-1.1510 Grundkurs i matematik 1
Mellanförhör 1 13.10.2009

Skriv ditt namn, nummer och övriga uppgifter på varje papper!
En räknedosa (godkänd för studentexamen) är ett tillåtet hjälpmedel i detta prov!

1. (4p) Visa med hjälp av induktion att $2^n \geq n^2$ då $n \geq 4$.

Lösning: Då $n = 4$ är påståendet $2^4 \geq 4^2$ dvs. $16 \geq 16$ vilket är sant. Antag nu att påståendet gäller för $n = k$ dvs. $2^k \geq k^2$. Om vi nu tar $n = k + 1$ så får vi med hjälp av induktionsantagandet

$$2^{k+1} - (k+1)^2 = 2 \cdot 2^k - k^2 - 2k - 1 \geq 2k^2 - k^2 - 2k - 1 = k^2 - 2k - 1 = k\left(k - 2 - \frac{1}{k}\right) > 0,$$

eftersom $2 + \frac{1}{k} < 3 < k$ då $k \geq 4$. Därför gäller påståendet också för $n = k + 1$ och således för alla n enligt induktionsprincipen.

---

2. (3p) Antag att $w = 2 + 3\mathrm{i}$. Skriv det komplexa talet $\dfrac{1 + 2\mathrm{i}}{\overline{w} + 1}$ i formen $a + \mathrm{i}b$.

Lösning: Eftersom $\overline{w} = 2 - 3\mathrm{i}$ så är

$$\frac{1 + 2\mathrm{i}}{\overline{w} + 1} = \frac{1 + 2\mathrm{i}}{2 - 3\mathrm{i} + 1} = \frac{(1 + 2\mathrm{i})(3 + 3\mathrm{i})}{9 + 9} = \frac{3 - 6 + (6 + 3)\mathrm{i}}{18} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

---

3. (6p) Bestäm alla lösningar till följande ekvationssystem med hjälp av Gauss algoritm:

$$\begin{array}{rrrrcr}
2x_1 & +4x_2 & & +6x_4 & = & 8 \\
-4x_1 & -7x_2 & +2x_3 & -12x_4 & = & -8 \\
2x_1 & +7x_2 & +6x_3 & +8x_4 & = & 30 \\
-4x_1 & -9x_2 & -2x_3 & -8x_4 & = & -28
\end{array}$$

Lösning: Med hjälp av Gauss algoritm får vi

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 6 & 8 \\ -4 & -7 & 2 & -12 & -8 \\ 2 & 7 & 6 & 8 & 30 \\ -4 & -9 & -2 & -8 & -28 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ r_2 \leftarrow r_2 + 2r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 + 2r_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 22 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & -12 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ r_3 \leftarrow r_3 - 3r_2 \\ r_4 \leftarrow r_4 + r_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ r_4 \leftarrow r_4 - 2r_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eftersom den sista raden endast består av nollor kan den lämnas bort. Den tredje raden ger ekvationen $2x_4 = -2$ vilket innebär att $x_4 = -1$. Eftersom det inte finns något pivot-element i den tredje kolumnen kan x_3 väljas fritt och vi skriver $x_3 = s$. Den andra raden ger ekvationen $x_2 + 2x_3 = 8$ vilket ger $x_2 = 8 - 2s$. Den första raden ger ekvationen $2x_1 + 4x_2 + 6x_4 = 8$ vilket ger $x_1 = 4 - 2x_2 - 3x_4 = 4 - 16 + 4s + 3 = -9 + 4s$. Lösningen kan alltså skrivas i formen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 8 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

---

4. (2p) Vad avses med partiell pivotering och vad försöker man uppnå med den?
Lösning: Partiell pivotering innebär att man i Gauss algoritm byter rader så att pivot-elementet till sitt absolutbelopp blir så stort som möjligt. Med detta försöker man minska avrundningsfelens inverkan på slutresulatet och i allmänhet lyckas det väl.

---

5. (5p) Bestäm matrisens $A = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}$ egenvärden och räkna ut en egenvektor för ett egenvärde (men du behöver inte räkna ut en egenvektor för det andra egenvärdet).
Lösning: Först löser vi den karakteristiska ekvationen

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} (8-\lambda) & 10 \\ -5 & (-7-\lambda) \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - \lambda - 6 = 0.$$

Som lösningar får vi,

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \begin{cases} 3, \\ -2, \end{cases}$$

av vilket vi ser att egenvärdena är $\lambda_1 = 3$ och $\lambda_2 = -2$.

I nästa steg räknar vi ut en egenvektor som hör till egenvärdet $\lambda_1 = 3$ dvs. vi löser ekvationen $(A - 3I)X = 0$. Med Gauss' metod får vi,

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 & 0 \\ -5 & -10 & 0 \end{bmatrix} \quad r_2 \leftarrow r_2 + r_1$$
$$\sim \begin{bmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Av detta ser vi att om vi väljer $x_2 = 1$ så får vi ur ekvationen $5x_1 + 10x_2 = 0$ lösningen $x_1 = -2$. Som egenvektor kan vi alltså välja $X_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

En egenvektor som hör till egenvärdet $\lambda_2 = -2$ kan vi räkna ut på samma sätt, dvs. vi löser ekvationen $(A + 2I)X = 0$. Med Gauss' metod får vi,

$$\begin{bmatrix} 10 & 10 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \quad r_2 \leftarrow r_2 + \tfrac{1}{2} r_1$$
$$\sim \begin{bmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Av detta ser vi att om vi väljer $x_2 = 1$ så får vi ur ekvationen $10x_1 + 10x_2 = 0$ lösningen $x_1 = -1$. Som egenvektor kan vi alltså välja $X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

---

6. (4p) Antag att A är en sådan kvadratisk matris att A:s egenvärden hör till mängden $\{0, 1\}$. Följer det alltid av detta eller bara under vissa tilläggsvillkor (vilka i så fall) att $A^2 = A$? Motivera ditt svar.

Lösning: Om vi väljer $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ så är egenvärdena elementen på diagonalen (eftersom matrisen är övertriangulär), dvs. 0. En räkning visar att

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \neq A.$$

Om man däremot antar att A kan diagonaliseras, dvs. man kan bilda en matris V av A:s egenvektorer så att V är inverterbar, då är $A = VDV^{-1}$ där D är en diagonalmatris med egenvärdena 0 och/eller 1 på diagonalen och i detta fall får man

$$A^2 = VDV^{-1}VDV^{-1} = VDIDV^{-1} = VD^2V^{-1} = VDV^{-1} = A,$$

eftersom $D^2 = D$ vilket är en följd av att $\lambda^2 = \lambda$ om $\lambda \in \{0, 1\}$.
