Mat-1.1510 Grundkurs i matematik 1, del II

G. Gripenberg

TKK

12 november 2009

Max och min

Om $A \subset \mathbb{R}$ så är $\max A$ det största elementet i A (på motsvarande sätt är $\min A$ det minsta elementet) men problemet är att det inte alltid finns ett största (eller minsta) element, som tex. i mängden $\{ x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1 \}$ och då kan man inte tala om $\max A$ (eller $\min A$). Supremum och infimum är generaliseringar av maximum och minimum så att detta problem inte uppstår.

Supremum och infimum

Ifall $A \subset \mathbb{R}$ så är $\sup(A) = a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ifall

- *Om $x \in A$ så gäller $x \le a$;*
- *Om $\alpha < a$ så finns ett tal $x \in A$ så att $x > \alpha$.*

Således är $\sup(A)$ minsta möjliga övre gräns för elementen i A.
Ifall $A \subset \mathbb{R}$ så är $\inf(A) = b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ifall

- *Om $x \in A$ så gäller $x \ge b$;*
- *Om $\beta > b$ så finns ett tal $x \in A$ så att $x < \beta$.*

Således är $\inf(A)$ största möjliga nedre gräns för elementen i A.

Supremum och infimum av den tomma mängden

$$\sup(\emptyset) = -\infty \quad \textit{och} \quad \inf(\emptyset) = +\infty.$$

Obs!

Det är en egenskap hos de reella talen att $\sup(A)$ och $\inf(A)$ esisterar för varje mängd $A \subset \mathbb{R}$. Motsvarande gäller tex. inte om man byter ut de reella talen mot de rationella och då också kräver att $\sup(A)$ och $\inf(A)$ skall vara rationella tal.

Obs!

$$\sup_{x\in A} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup(\{ f(x) : x \in A \}) \quad \textit{och} \quad \inf_{x\in A} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \inf(\{ f(x) : x \in A \}).$$

Gränsvärde, informell definition

$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ *ifall det är sant att $|f(x) - L|$ är "litet" när $|x - x_0|$ är "tillräckligt litet" och $x \neq x_0$.*

Gränsvärde, formell definition

$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} f(x) = L$ *ifall det för varje $\epsilon > 0$ finns ett tal $\delta > 0$ så att om $0 < |x - x_0| < \delta$ och $x \in \Omega$ så gäller $|f(x) - L| < \epsilon$.*

Kommentar I

Observera att gränsvärdets vara eller icke vara och eventuella värde inte är beroende av om $f(x_0)$ är definierad och i så fall vad värdet är! Om $\Omega = \mathbb{R}$ eller det annars är klart vad Ω är skriver man $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

Kommentar II

Vanligtvis antar man att $f(x)$ är definierad för alla $x \in \Omega$ men om detta inte är sant så kan man alltid tolka påståendet $|f(x) - L| < \epsilon$ som falskt om $f(x)$ inte är definierad.

Kommentar III

Definitionen med ϵ on δ **är** *komplicerad och visar sitt värde i jämförelse med mera flummiga varianter egentligen bara i de verkligt knepiga fallen. I de enklare fallen är det antingen självklart vad gränsvärdet är, eller så kan man med framgång använda räkneregler för gränsvärden.*

Räkneregler för gränsvärden

Ifall $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} f(x) = F$ *och* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} g(x) = G$ *så gäller*

- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big) = \alpha F + \beta G$,
- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} f(x)g(x) = FG$,
- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{F}{G}$ *om* $G \neq 0$ $\scriptstyle \text{och } G \neq \infty$,
- $F \leq G$ *om* $f(x) \leq g(x)$ *då* $0 < |x - x_0| < c$ *där* $c > 0$.

Instängningsprincipen

Ifall $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ *och* $|f(x)| \leq g(x)$ $\scriptstyle \text{då } 0 < |x - x_0| \leq c \text{ där } c > 0$ *så gäller*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0.$$

Aningen mera allmänt: Ifall $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$ *och* $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ $\scriptstyle \text{då } 0 < |x - x_0| \leq c \text{ där } c > 0$ *så gäller*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L.$$

Variabelbyte

Om $\lim_{x\to x_0} f(x) = F$, $\lim_{y\to F} g(y) = G$ *och* $g(F) = G$ *eller* $f(x) \neq F$ *då* $x \neq x_0$, *så gäller*

$$\lim_{x\to x_0} g\big(f(x)\big) = \lim_{y\to F} g(y).$$

Gränsvärdet av en talföljd $\lim_{n\to\infty} a_n = L$:

För all $\epsilon > 0$ *finns ett tal* $N_0 \in \mathbb{N}$ *så att om* $n > N_0$ *så gäller* $|a_n - L| < \epsilon$.

Talföljder som har ett gränsvärde

Om $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$ *är en sådan talföljd att* $a_{n+1} \geq a_n$ *får alla* $n \geq n_0$ *så har talföljden gränsvärdet* $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\geq n_0} a_n$. *Om istället* $a_{n+1} \leq a_n$ *för alla* $n \geq n_0$ *så gäller* $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\geq n_0} a_n$

Inget gränsvärde

Gränsvärdet $\lim_{x\to x_0} f(x)$ **finns inte** *ifall det finns två talföljder* (a_n) *ja* (b_n) *så att* $a_n \neq x_0$ *och* $b_n \neq x_0$ *för alla* n, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x_0$, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = A$ *och* $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = B$ *där* $A \neq B$.

Ensidiga gränsvärden

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in(x_0,\infty)}} f(x) \qquad \lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in(-\infty,x_0)}} f(x).$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x) = L.$$

Varianter av gränsvärden

- $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} f(x) = \infty$ *ifall för varje* M *finns ett tal* $\delta > 0$ *så att om* $0 < |x - x_0| < \delta$ *och* $x \in \Omega$ *så gäller* $f(x) > M$.
- $\lim_{\substack{x\to\infty\\ x\in\Omega}} f(x) = L$ *ifall för varje* $\epsilon > 0$ *finns ett tal* N *så att om* $x > N$ *och* $x \in \Omega$ *så gäller* $|f(x) - L| < \epsilon$.
- $\lim_{\substack{x\to-\infty\\ x\in\Omega}} f(x) = -\infty$ *ifall för varje* M *finns ett tal* N *så att om* $x < N$ *och* $x \in \Omega$ *så gäller* $f(x) < M$.

Andra varianter definieras på "samma sätt".

Räkneregler med ∞

Om $a > 0$ *så gäller*

- $a \cdot \infty = \infty$ *och* $(-a)\cdot\infty = -\infty$
- $\infty + \infty = \infty$ *och* $\infty\cdot\infty = \infty$
- $\dfrac{a}{\infty} = \dfrac{-a}{\infty} = 0$
- $0\cdot\infty = ?$, $\infty - \infty = ?$, $\dfrac{0}{0} = ?$, $\dfrac{\infty}{\infty} = ?$ *och* $\dfrac{a}{0} = ?\quad(\pm\infty)$

Räkneregler, forts.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to 0+} f\left(\frac{1}{x}\right) = L$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to 0+} f\left(-\frac{1}{x}\right) = L$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} \frac{1}{f(x)} = 0 \quad \text{ifall } f(x) > 0 \text{ då } x\in\Omega$$

Kontinuerliga funktioner

Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *är kontinuerlig i punkten* x_0 *ifall* $x_0 \in \Omega$ *och* $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} f(x) = f(x_0)$.
Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *är kontinuerlig (i* Ω*) om den är kontinuerlig i varje punkt i* Ω *dvs. ifall* $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} f(x) = f(x_0)$ *för varje* $x_0 \in \Omega$.

Egenskaper hos kontinuerliga funktioner

Om $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *och* $g : \Omega \to \mathbb{R}$ *är kontinuerliga så är också funktionerna* $\alpha f(x) + \beta g(x)$ *och* $f(x)g(x)$ *kontinuerliga i* Ω *och* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *är kontinuerlig i mängden* $\{\, x \in \Omega : g(x) \neq 0 \,\}$.
Om $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ *och* $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ *är kontinuerliga och* $g(x) \in \mathcal{D}_f$ *för alla* $x \in \mathcal{D}_g$ *så är den sammansatta funktionen* $(f\circ g)(x) = f(g(x))$ *kontinuerlig:* $\mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$.

Bolzanos teckenbytessats

Om $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *är kontinuerlig och* $f(a)f(b) < 0$ *(dvs.* f *har olika tecken i intervallets ändpunkter) så finns det en punkt* $x_0 \in (a,b)$ *så att* $f(x_0) = 0$.

Max och min uppnås på ett slutet intervall

Om $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *är kontinuerlig så finns det punkter* x_1 *och* $x_2 \in [a,b]$ *så att*

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2), \quad x \in [a,b]$$

dvs. $f(x_1) = \inf_{x\in[a,b]} f(x) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ *och* $f(x_2) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$.

$a_{n+1} = f(a_n)$:

Ifall talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *definieras med ekvationen* $a_{n+1} = f(a_n)$ *och* ***ifall*** *gränsvärdet* $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ *existerar och är ändligt och* f *är kontinuerlig så är* a *en lösning till ekvationen* $x = f(x)$.

Serier eller oändliga summor

Serien $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *konvergerar ifall talföljden* $(s_k)_{k=n_0}^{\infty}$ *där* $s_k = \sum_{n=n_0}^{k} a_n$ *har ett ändligt gränsvärde* $\lim_{k\to\infty} s_k$ *och då skrivs gränsvärdet, dvs. summan, som* $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$

Geometrisk serie

Serien $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ *konvergerar om och endast om* $|q| < 1$ *(eller* $a = 0$*)* *och då är*

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q} = \frac{\text{"Första termen"}}{1 - \text{"Kvoten av två på varandra följande termer"}}$$

Absolut konvergens,

- *Om serien* $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ *konvergerar (dvs. serien* $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *konvergerar absolut) så konvergerar också serien* $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.
- *Om det finns ett tal* $C < \infty$ *så att* $\sum_{n=n_0}^{k} |a_n| \le C$ *för alla* $k \ge n_0$ *så konvergerar serien* $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$.

Kvottestet

Serien $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *konvergerar absolut ifall*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q < 1$$

och konvergerar inte (dvs. divergerar) om $q > 1$.

Exponentfunktionen

Serien

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

konvergerar för alla $x \in \mathbb{R}$ *(eller* $\mathbb{C}$*) och*

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

och därför skriver man ofta

$$\exp(x) = e^x.$$

Derivata

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Om gränsvärdet existerar och är ändligt (alltså inte ∞ *eller* $-\infty$*) så säger man att* f *är deriverbar i punkten* x *och derivatan är* $f'(x)$. *Detta förutsätter att* f *är definierad åtminstone i intervallet* $(x-\delta, x+\delta)$ *för något tal* $\delta > 0$.
Andra beteckningar för derivatan är $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x) = D_x f(x)$.

Räkneregler för derivatan

- $(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
- $h(x) = f(g(x)) \Rightarrow h'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Obs!

- *Om* f *är deriverbar i punkten* x *så är* f *kontinuerlig i* x.
- *Derivatan är tangentens vinkelkoefficient.*
- *Derivatan är "förändringshastighet", tex. om en kropp befinner sig i punkten* $f(t)$ *vid tidpunkten* t *så är* $f'(t)$ *hastigheten med vilken den rör sig.*
- $\frac{d}{dx} f'(x) = f''(x)$, $\frac{d}{dx} f''(x) = f'''(x) = f^{(3)}(x)$, $\frac{d}{dx} f^{(k)}(x) = f^{(k+1)}(x)$.

Ensidiga derivator

$$f'_+(x) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'_-(x) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

f *är deriverbar i punkten* $x \Leftrightarrow f'_+(x)$ *och* $f'_-(x)$ *existerar och* $f'_+(x) = f'_-(x)$.

Partiella derivator

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$
$$f_y(x,y) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$$

Andra beteckningar: $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = D_x f = f_1 = D_1 f \ldots,$
$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Implicit derivering

Ifall $F(x_0,y_0) = 0$, $F_y(x_0,y_0) \neq 0$ *och* F *och* F_y *är kontinuerliga så finns det en deriverbar funktion* $y(x)$ *så att*

$$F(x,y(x)) = 0 \quad (\text{då } |x-x_0| \text{ är tillräckligt litet}),$$
$$y(x_0) = y_0$$
$$y'(x_0) = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$$

Optimeringens huvudsats

Ifall f *är deriverbar i punkten* x_0 *och* $f(x) \leq f(x_0)$ *då* $|x-x_0| < \delta$ *där* $\delta > 0$ *så gäller* $f'(x_0) = 0$ *dvs. i en lokal maximipunkt (eller minimipunkt) är derivatan* 0.

Rolles sats

Ifall $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *är kontinuerlig,* f *är deriverbar i intervallet* (a,b) *och* $f(a) = f(b)$ *så finns det en punkt* $c \in (a,b)$ *så att* $f'(c) = 0$.

Medelvärdessatsen

Ifall $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *är kontinuerlig och* f *är deriverbar i intervallet* (a,b) *så finns det en punkt* $c \in (a,b)$ *så att*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Linjär approximation

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h$$

Monotona funktioner

Antag att $\mathcal{I}$ *är ett intervall,* $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ *och* $x_1, x_2 \in \mathcal{I}$.

- f *är icke-avtagande om* $f(x_1) \geq f(x_2)$ *då* $x_1 > x_2$.
- f *är strängt växande om* $f(x_1) > f(x_2)$ *då* $x_1 > x_2$.
- f *är icke-växande om* $f(x_1) \leq f(x_2)$ *då* $x_1 > x_2$.
- f *strängt avtagande om* $f(x_1) < f(x_2)$ *då* $x_1 > x_2$.

Om f *dessutom är deriverbar i* $\mathcal{I}$ *så gäller*

- $f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f$ *är icke-avtagande.*
- $f'(x) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f$ *är icke-växande.*
- $f'(x) \geq 0$ *och inte identiskt* 0 *på något öppet delintervall* $\Leftrightarrow$ f *är strängt växande.*
- $f'(x) \leq 0$ *och inte identiskt* 0 *på något öppet delintervall* $\Leftrightarrow$ f *är strängt avtagande.*

Konvexa funktioner

Ifall $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *är två gånger deriverbar så är* f **konvex** *ifall något,och därmed också alla, av följande villkor gäller:*

- $f((1-t)x_0 + tx_1) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1)$ $t \in [0,1]$ $x_0, x_1 \in (a,b)$, *dvs funktionens värde i en medelvärdespunkt är mindre än medelvärdet av funktions värden.*
- $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$, $dx, x_0 \in (a,b)$, *dvs. funktionens graf ligger ovanför tangenten.*
- $f'(x)$ *är en icke-avtagande funktion i intervallet* (a,b).
- $f''(x) \geq 0$, $x \in (a,b)$.

Funktionen f *är* **konkav** *om* $-f$ *är konvex.*

Konvexa mängder

En delmängd Ω *av ett vektorrum är konvex ifall* $(1-t)\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2 \in \Omega$ *när* $\mathbf{x}_1$ *och* $\mathbf{x}_2 \in \Omega$ *och* $t \in [0,1]$. *De konvexa delmängderna av* $\mathbb{R}$ *är intervall och en funktion* $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ *är konvex om och endast om mängden* $\{(x,y) : x \in \mathcal{I}, y \geq f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$ *är konvex.*

Inversa funktioner

Ifall $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, där $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ är ett intervall, är strängt växande (avtagande) och kontinuerlig så finns det en strängt växande (avtagande) och kontinuerlig funktion g så att

$$g(f(x)) = x, \quad x \in \mathcal{I}, \qquad f(g(y)) = y, \quad y \in \mathcal{J},$$

där $\mathcal{J} = \{\, y \in \mathbb{R} : y = f(x)$ för något $x \in \mathcal{I} \,\}$ också är ett intervall.
Om f är kontinuerligt deriverbar och $f'(x) \neq 0$ så är också g deriverbar i punkten $f(x)$:

$$g(f(x)) = x \Rightarrow g'(f(x))f'(x) = 1$$
$$f(g(y)) = y \Rightarrow f'(g(y))g'(y) = 1$$

Exponentfunktionen

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
$$e^{x+y} = e^x e^y, \quad e^0 = 1, \quad e^x \neq 0$$
$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} x^m e^{-x} = 0$$

Sinus och cosinus

$$\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$
$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$
$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x), \quad \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$$

Logaritmfunktionen

$$\ln(e^x) = x, \quad x \in \mathbb{R}$$
$$e^{\ln(x)} = x, \quad x > 0$$
$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0+} x^\alpha \ln(x) = 0, \quad \alpha > 0$$

Allmänna exponenter

$$a^b = e^{b\ln(a)}, \quad a > 0$$

Av detta följer att

- $\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{x\ln(a)} = e^{x\ln(a)}\ln(a) = a^x \ln(a)$ *då* $a > 0$
- $\frac{d}{dx} x^a = \frac{d}{dx} e^{a\ln(x)} = e^{a\ln(x)} a \frac{d}{dx}\ln(x) = a x^a \frac{1}{x} = a x^{a-1}$ *då* $x > 0$

Om $b > 0$ är $0^b = 0$ och om $b = \frac{m}{n}$ där n är udda kan man definiera $a^b = (\mathrm{sign}(a)|a|^{\frac{1}{n}})^m$ då $a \neq 0$ där $\mathrm{sign}\,(a) = +1$ då $a > 0$ och -1 då $a < 0$.

Arcusfunktioner

$$\arcsin(\sin(x)) = x, \quad x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$
$$\sin(\arcsin(x)) = x, \quad x \in [-1, 1]$$
$$\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$$
$$\arctan(\tan(x)) = x, \quad x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})$$
$$\tan(\arctan(x)) = x, \quad x \in \mathbb{R}$$
$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$\arccos(\cos(x)) = x, \quad x \in [0, \pi]$$
$$\cos(\arccos(x)) = x, \quad x \in [-1, 1]$$
$$\frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$$

Differentialekvation av första ordningen

Om man skall lösa differentialekavtionen

$$y'(t) = ay(t)$$

kan man göra ett försök med funktionen $y(t) = \mathrm{e}^{rt}c$ *och genom att sätta in detta uttryck får man*

$$r\mathrm{e}^{rt}c = a\mathrm{e}^{rt}c.$$

Eftersom $\mathrm{e}^{rt} \neq 0$ *och man kan anta att* $c \neq 0$ *får man* $r = a$ *och man kan visa att varje lösning kan skrivas i formen*

$$y(t) = \mathrm{e}^{at}c.$$

Om $y(0)$ *är given kan man skriva lösningen i formen*

$$y(t) = \mathrm{e}^{at}y(0).$$

Differentialekvation av andra ordningen

Om man skall lösa differentialekvationen

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$$

kan man göra ett försök med funktionen $y(t) = \mathrm{e}^{rt}$ *och genom att sätta in detta uttryck får man*

$$r^2\mathrm{e}^{rt} + ar\mathrm{e}^{rt} + b\mathrm{e}^{rt} = 0.$$

Eftersom $\mathrm{e}^{rt} \neq 0$ *och får man den karakteristiska ekvationen*

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Antag att lösningarna är r_1 *och* r_2*. Eftersom ekvationen är linjär (så att summan av två lösningar också är en lösning) så är den allmänna lösningen*

$$\begin{aligned}
y(t) &= c_1\mathrm{e}^{r_1 t} + c_2\mathrm{e}^{r_2 t} \quad \textit{om} \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R} r_1 \neq r_2,\\
y(t) &= c_1\mathrm{e}^{r_1 t} + c_2 t\mathrm{e}^{r_1 t} \quad \textit{om} \quad r_1 = r_2 \in \mathbb{R},\\
y(t) &= c_1\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2\mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t) \quad \textit{om} \quad r_1, r_2 = \alpha \pm \mathrm{i}\beta.
\end{aligned}$$

Om tex. $y(0)$ *och* $y'(0)$ *är givna kan man bestämma* c_1 *och* c_2.

Linjära differentialekvationssystem

Om man skall lösa differentialekvationssystemet, där A *är en* $m \times m$ *matris,*

$$Y'(t) = AY(t)$$

kan man göra ett försök med funktionen $Y(t) = \mathrm{e}^{rt}X$ *och genom att sätta in detta uttryck får man* $r\mathrm{e}^{rt}X = \mathrm{e}^{rt}AX$ *och eftersom* $\mathrm{e}^{rt} \neq 0$ *måste* r *och* X *uppfylla ekvationen*

$$rX = AX.$$

Om $X \neq \mathbf{0}$ *så är* r *ett egenvärde för* A *och* X *en egenvektor. Eftersom ekvationen är linjär är också*

$$Y(t) = \sum_{j=1}^{m} c_j\mathrm{e}^{\lambda_j t}X_j,$$

en lösning där λ_j *är* A*:s egenvärden och* X_j *motsvarande egenvektor. Om egenvektorerna* $X_1, \ldots, X_m$ *är linjärt oberoende kan varje lösning skrivas i denhär formen. Lösningen kan också skrivas i formen* $Y(t) = \mathrm{e}^{At}Y(0)$ *där* $\mathrm{e}^{At} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{n!}(At)^n$.

Extremvärden

Ifall $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *är kontinuerlig så finns det tal* x_1 *och* $x_2 \in [a,b]$ *så att*

$$\begin{aligned}
&f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \quad x \in [a,b],\\
&x_1, x_2 \in \{a\} \cup \{b\} \cup \{\, x \in (a,b) : f \textit{ är inte deriverbar i punkten } x \,\}\\
&\qquad \cup \{\, x \in (a,b) : f'(x) = 0 \,\}
\end{aligned}$$

Lokala extremvärden

Ifall $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *är deriverbar,* $x_0 \in (a,b)$*,* $f'(x_0) = 0$ *och* $f''(x_0) > 0$ *så finns det ett tal* $\delta > 0$ *så att*

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \textit{då} \quad |x - x_0| < \delta \quad \textit{och} \quad x \in (a,b).$$

Extremvärden i öppna intervall

Ifall $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig och det finns ett tal $x_0 \in (a, b)$ så att $f(x_0) \le \lim_{x\to a+} f(x)$ och $f(x_0) \le \lim_{x\to b-} f(x)$ så finns det ett tal $x_1 \in (a, b)$ så att

$$
\begin{aligned}
&f(x_1) \le f(x), \quad x \in (a, b),\\
&\qquad x_1 \in \{\, x \in (a, b) : f \text{ är inte deriverbar i punkten } x \,\}\\
&\qquad\qquad\qquad \cup \{\, x \in (a, b) : f'(x) = 0 \,\}
\end{aligned}
$$

Newton-Raphsons metod

Om man vill lösa ekvationen $f(x) = 0$ och har en approximation till lösningen kan man välja $x_{n+1} = x_n + h$ så att

$$f(x_{n+1}) = f(x_n + h) \approx f(x_n) + f'(x_n)h = 0$$

och då får man

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Ifall $|f''(x)| \le C$ och $|f'(x)| \ge c > 0$ så konvergerar metoden snabbt vilket den gör om f är två gånger kontinuerligt deriverbar, lösningen x_* är sådan att $f'(x_*) \ne 0$ och $|x_0 - x_*|$ är tillräckligt litet. Men i allmänhet finns det inga garantier för att metoden skall konvergera.

Fixpunktsiteration

För att lösa ekvationen $x = g(x)$ kan man välja x_0 och räkna

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n \ge 1.$$

Talföljden (x_n) konvergerar åtminstone om $|g'(t)| \le K < 1$.

Feluppskattning

Om man för att lösa ekvationen $f(x) = 0$ på något sätt beräknat approximationerna $x_0, x_1, x_2, \dots$ och vill bestämma lösningen med noggrannheten δ så kan man sluta då $f(x_n - \delta)f(x_n + \delta) < 0$ eller då antingen $f(x_n - \delta)f(x_n) < 0$ eller $f(x_n)f(x_n + \delta) < 0$.

$f(x) = O(g(x))$

Uttrycket $f(x) = O(g(x))$ betyder att det finns en konstant C så att

$$|f(x)| \le C|g(x)|$$

(då $x \in (a, b)$, eller $|x - x_0|$ är tillräckligt litet, x är tillräckligt stort eller något motsvarande beroende på sammanhanget).

$$
\begin{aligned}
&f(x) = O(f(x))\\
&f(x)O(g(x)) = O(f(x)g(x))\\
&\frac{O(g(x))}{f(x)} = O\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)\\
&f(x) = O(g(x)) \Rightarrow O(f(x)) + O(g(x)) = O(g(x))\\
&f(x) = O(g(x)) \Rightarrow O(f(x) + g(x)) = O(g(x))
\end{aligned}
$$

Taylorutveckling

Om f är $k+1$ gånger deriverbar så är

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(k+1)}(t)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1},$$

där $(t-a)(x-t) > 0$ dvs. t ligger mellan a och x och uttrycket $f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ är funktionens f Taylorpolynom med gradtalet k i punkten a.

Några Taylorutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^k}{k!} + O(x^{k+1})$$
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + O(x^{k+1})$$

Taylorutvecklingen är entydig

Om f är k gånger kontinuerligt deriverbar och

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_k(x-a)^k + O\Big((x-a)^{k+1}\Big)$$

så är $c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$, $c_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \dots, c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

l'Hopitals regel I

Om f och g är deriverbara, $f(a) = g(a) = 0$, $g'(x) \neq 0$ då $x \neq a$ så gäller

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Här är $L \in [-\infty, \infty]$ och på a kan ersättas med $a+$, $a-$, $-\infty$ eller $+\infty$.

l'Hopitals regel II

Om f och g är deriverbara, $\lim_{x\to a}|g(x)| = \infty$, $g'(x) \neq 0$ då $x \neq a$ så gäller

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Här är $L \in [-\infty, \infty]$ och på a kan ersättas med $a+$, $a-$, $-\infty$ eller $+\infty$.

Antiderivata eller integralfunktion

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

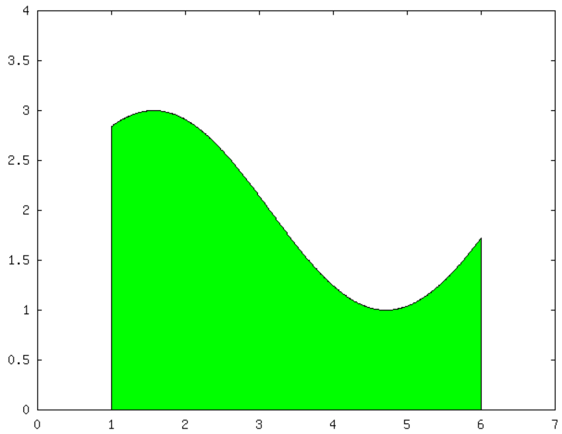
och man säger då att F är funktionens f antiderivata eller integralfunktion. Observera att man alltid kan addera en konstant till antiderivatan.

Några exempel

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$
$$\int x^a\,dx = \frac{1}{1+a}x^{a+1} + C, \quad a \neq -1, \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C$$
$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C, \qquad \int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$$
$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \Rightarrow \quad \int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

$\int_a^b f(x)\,dx$, informell definition

Om $f(x) \geq 0$ då $x \in [a,b]$ så är $\int_a^b f(x)\,dx$ arean av "området under $f(x)$ mellan a och b".



Trappfunktioner

En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en trappfunktion om den kan skrivas i formen

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \mathbf{1}_{[a_{j-1},a_j)}(x),$$

där $-\infty < a_0 < a_1 \ldots < a_{j-1} < a_j < \ldots a_m < \infty$, $c_1 \neq 0$, $c_m \neq 0$, $c_j \neq c_{j+1}$ då $j = 1, 2 \ldots, m-1$ och

$$\mathbf{1}_\Omega(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \Omega. \end{cases}$$

Observera att en trappfunktion bara kan skrivas på ett sätt i formen $\sum_{j=1}^{m} c_j \mathbf{1}_{[a_{j-1},a_j)}$ så att villkoren ovan är uppfyllda.

$\int_a^b f(x)$ då f är en trappfunktion

Om $f = \sum_{j=1}^{m} c_j \mathbf{1}_{[a_{j-1},a_j)}$ är en trappfunktion så är

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{m} c_j \mathrm{m}([a_{j-1},a_j) \cap (a,b))$$

där $\mathrm{m}(\mathcal{I})$ är längden av intervallet $\mathcal{I}$ dvs. arean "under" f beräknas som en summa av arean av rektanglar (med minustecken om de ligger under x-axeln).

"Nästan överallt"

Ett påstående sägs gälla nästan överallt om det gäller för alla punkter utom de x som hör till en mängd A vars mått är 0, dvs. är sådan att det för varje tal $\epsilon > 0$ finns intervall $\mathcal{I}_j$ så att $A \subset \cup_{j=1}^{\infty} \mathcal{I}_j$ och $\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{m}(\mathcal{I}_j) < \epsilon$

(där $\mathrm{m}(\mathcal{I})$ är längden av intervallet $\mathcal{I}$).

$\int_a^b f(x)\,dx$

Om $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ($-\infty \leq a < b \leq \infty$) är sådan att det finns en följd $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ trappfunktioner så att

- *$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$ nästan överallt i (a,b),*
- *$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |g_n(x) - g_{n+1}(x)|\,dx < \infty$,*

så är f integrerbar och $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,dx$.

Kommentar I

För att denna definiton skall vara förnuftig bör man visa att om $f(x) = 0$ nästan överallt så är $\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,dx = 0$.

Kommentar II

Med definitionen ovan är en funktion f integrerbar om och endast om funktionerna $f_+ = \max\{0, f\}$ och $f_- = \max\{0, -f\}$ är integrerbara. Detta är inte fallet med diverse andra definitioner för integraler av obegränsade funktioner eller integraler över oändligt långa intervall.

Kommentar III

Varje lite också förnuftig funktion är sådan att den är gränsvärdet nästan överallt av en följd trappfunktioner (och då säger man att funktionen är mätbar) och man kan visa att frågan om funktionen är integrerbar då bara gäller huruvida $\int_a^b |f(x)|\,dx$ får ett ändligt värde, vilket är det samma som att $\int_a^b \min\{n, |f(x)|\}\mathbf{1}_{[-n,n]}(x)\,dx \le C$ för alla n där C är en konstant som inte beror på n. För att visa detta kan man ofta använda den sk. majorantprincipen. Om f är mätbar, $f(x) \ge 0$ men inte integrerbar kan man skriva $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$.

Majorantprincipen

Funktionen $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ är integrerbar ifall $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$ nästan överallt i (a,b) där funktionerna g_n är trappfunktioner och det finns en funktion h som är integrerbar i (a,b) så att $|f(x)| \le h(x)$ nästan överallt.
När man använder majorantprincipen är det ofta viktigt att veta att

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 1 \qquad \text{och} \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1.$$

Två specialfall

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad \text{och} \quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Egenskaper hos integraler

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

$$\int_a^b \Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

Om $a < b$ gäller dessutom

$$f(x) \le g(x), \quad x \in (a,b) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Monoton konvergens

Ifall

- *funktionerna f_n, $n = 1, 2, \ldots$ är integrerbara i (a,b),*
- *$f_1(x) \le f_x(x) \le \ldots$ nästan överallt i (a,b),*
- *$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ nästan överallt i (a,b)*
- *$\sup_{n\ge 1} \int_a^b f_n(x)\,dx < \infty$,*

så är f integrerbar i (a,b) och $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

Begränsad konvergens

Ifall

- *funktionerna f_n, $n = 1, 2, \ldots$ är integrerbara i (a,b),*
- *$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ nästan överallt i (a,b)*
- *det finns en funktion g som är integrerbar i (a,b) så att $|f_n(x)| \le g(x)$ nästan överallt i (a,b) för alla $n \ge 1$,*

så är f integrerbar i (a,b) och $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

Analysens huvudsats

Ifall f är kontinuerlig i intervallet $[a,b]$ (och $-\infty < a < b < \infty$) så är

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x), \quad x \in (a,b)$$

Om F är kontinuerligt deriverbar i ett intervall som innehåller (a,b) och $-\infty < a < b < \infty$ så är

$$\int_a^b F'(x)\,dx = \Big/_a^b F(x) = F(b) - F(a).$$

Analysens huvudsats, version II

Om f är integrerbar i (a,b), $\int_c^x f(t)\,dt = F(x)$ för alla $x \in (a,b)$ där $c \in (a,b)$ så är

$$\int_a^b f(t)\,dt = \Big/_a^b F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x).$$