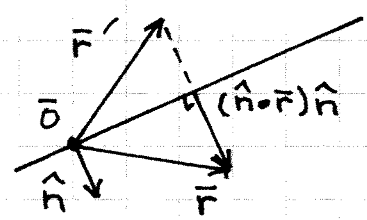
Gk1 i Matematik, supplement 1/07 Metsalo

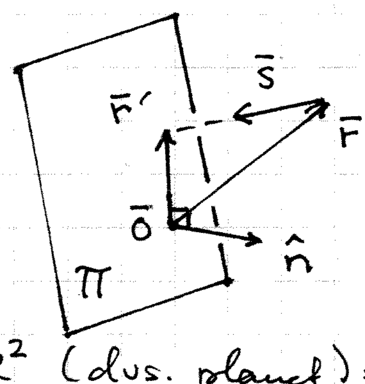
På insidan av detta blad finns några <u>extra uppgifter</u> för att göra somliga av alla de nya begreppen mer bekanta. Attackera dem gärna och glöm inte mottagningstiderna. Likaså finns där två problem av Sam Loyd, som kan attackeras med de metoder vi lärt oss.
Nedan och på baksidan beskrivs vissa <u>enkla manipulationer</u> av $\mathbb{R}^3$, som kan uttryckas mha. matriser och vektorer. Genom att i stället använda <u>homogena koordinater</u> (kap. 2.7) kan samma manipulationer uttryckas mha. enbart matriser också.
Friska upp minnet genom att studera <u>skalär- och vektorprodukten</u> i kap. 10.1–3 i Adams.

Manipulationer av $\mathbb{R}^3$ (bestående av kolumnvektorer $\bar{r}$) mha. vektorer och matriser:

1) Translation med vektorn $\bar{a}$: $\bar{r} \to \bar{r} + \bar{a}$ (vektoradd.)
2) Skalning med faktorn λ: $\bar{r} \to \lambda\bar{r}$ (mult. m. skalär)
3) Spegling i (hyper-)plan med enhetsnormalen $\hat{n}$ genom origo:
$\bar{r} \to \bar{r}' = \bar{r} - 2(\hat{n} \bullet \bar{r})\hat{n} =$
$= (I - 2\hat{n}\hat{n}^T)\bar{r} = H\bar{r}$ (matrismult.)

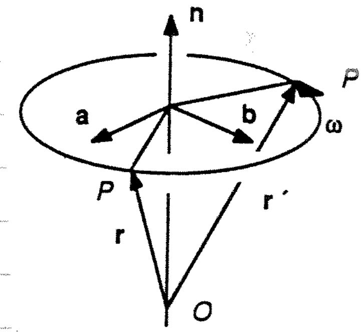


4) Parallellprojektion på planet Π med enhetsnormalen $\hat{n}$ genom origo i riktningen $\bar{s}$ ($\hat{n} \bullet \bar{s} \neq 0$):
$\bar{r} \to \bar{r}' = \bar{r} + \alpha\bar{s}$, där
$\alpha = -(\hat{n} \bullet \bar{r})/(\hat{n} \bullet \bar{s}) = -\frac{\hat{n}^T\bar{r}}{\hat{n}^T\bar{s}}$,
så $\bar{r}' = \bar{r} - \frac{\hat{n}^T\bar{r}}{\hat{n}^T\bar{s}} \cdot \bar{s} = \bar{r} - \frac{1}{\hat{n}^T\bar{s}} \cdot \bar{s} \cdot \hat{n}^T\bar{r} =$
$= (I - \frac{1}{\hat{n}^T\bar{s}} \cdot \bar{s}\hat{n}^T)\bar{r} = P\bar{r}$
(åter en matrismult.)



5a) Vridning vinkeln ω kring origo i $\mathbb{R}^2$ (dvs. planet):
$\bar{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \bar{r}' = U\bar{r} = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
(åter en matrismult.)
5b) Vridning någon vinkel kring någon axel genom origo i $\mathbb{R}^3$ (dvs. rummet) ges på baksidan.
6) Kombinationer av dessa manipulationer.

5b) Nedan härleds vridningsmatrisen U för vridning av rummet $\mathbb{R}^3$ vinkeln ω kring en axel genom origo med (enhets-) riktningsvektorn $\hat{n}$.
Texten är stulen ur Simo K. Kivelä: Algebra ja Geometria. Märk, att vektorprodukten kan ges m.h.a. matrismultiplikation:



$$\hat{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \bar{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{n} \times \bar{r} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = N^{\times} \cdot \bar{r}.$$

Märk, att $N^{\times}$ är en anti-symmetrisk 3×3-matris.
Vi har $\bar{r} \to \bar{r}' = U\bar{r}$ (åter en matrismult.).

Olkoon $\mathbf{n}$ kiertoakselin suuntavektori ($|\mathbf{n}| = 1$) ja olkoon ω kiertokulma; näiden suunnat on valittava siten, että jos oikeakätistä ruuvia kierretään kiertokulman positiiviseen suuntaan, se alkaa edetä vektorin $\mathbf{n}$ suuntaan. Olkoot $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ kaksi yksikkövektoria, jotka ovat kohtisuorassa vektoria $\mathbf{n}$ vastaan siten, että $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{n}\}$ on ortonormeerattu oikeakätinen kanta. Tällöin on erityisesti $\mathbf{n} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$ ja $\mathbf{n} \times \mathbf{b} = -\mathbf{a}$.

Argumenttipisteelle $P \mathrel{\widehat{=}} \mathbf{r} \mathrel{\widehat{=}} x$ saadaan nyt esitys

$$\mathbf{r} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} + \rho(\cos\varphi\mathbf{a} + \sin\varphi\mathbf{b}),$$

missä ρ on pisteen kohtisuora etäisyys akselista. Tällöin on $\mathbf{n} \times \mathbf{r} = \rho(\cos\varphi\,\mathbf{b} - \sin\varphi\,\mathbf{a})$. Kuvapiste $P' \mathrel{\widehat{=}} \mathbf{r}' \mathrel{\widehat{=}} x'$ saadaan kiertämällä vektorin $\mathbf{r}$ jälkimmäistä komponenttia kulman ω verran:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} + \rho[\cos(\varphi + \omega)\mathbf{a} + \sin(\varphi + \omega)\mathbf{b}] \\ &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} + \cos\omega\,[\rho(\cos\varphi\mathbf{a} + \sin\varphi\mathbf{b})] + \sin\omega\,[\rho(-\sin\varphi\mathbf{a} + \cos\varphi\mathbf{b})] \\ &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} + \cos\omega\,[\mathbf{r} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n}] + \sin\omega\,[\mathbf{n} \times \mathbf{r}] \end{aligned}$$

eli koordinaattimuodossa

$$\begin{aligned} x' &= (n^{\mathrm{T}}x)n + \cos\omega\,[x - (n^{\mathrm{T}}x)n] + \sin\omega\,[N^{\times}x] \\ &= [nn^{\mathrm{T}} + (\cos\omega)(I - nn^{\mathrm{T}}) + (\sin\omega)N^{\times}]x, \end{aligned}$$

missä $N^{\times}$ on ristitulon esitysmatriisi: $\mathbf{n} \times \mathbf{r} \mathrel{\widehat{=}} N^{\times}x$.

Kiertokuvauksen matriisi on siis

$$U = nn^{\mathrm{T}} + (\cos\omega)(I - nn^{\mathrm{T}}) + (\sin\omega)N^{\times}.$$

X1) Genomför de geometriska beräkningarna i $\mathbb{R}^n$:

a) Bestäm längden hos vektorn $\bar{u} = (1, -1, 1, -1)$ i $\mathbb{R}^4$

b) Dito för $\bar{v} = (1, 3, 4, -5, 7)$ i $\mathbb{R}^5$

c) Dito för $\bar{w} = (1, 2, 3, \ldots, 23, 24)$ i $\mathbb{R}^{24}$

d) Bestäm vinkeln mellan vektorerna $\bar{u} = (-1, 0, 2, 3, -6)$ och $\bar{v} = (1, 3, 4, -5, 7)$ i $\mathbb{R}^5$

e) Dito för $(1, -2, 2, 0)$ och $(1, 1, 5, 3)$ i $\mathbb{R}^4$

X2) Visa att följande vektormängder spänner vektorrummet:

a) $\{(0,0,0,1), (0,0,1,1), (0,1,1,1), (1,1,1,1)\}$; $\mathbb{R}^4$

b) $\{(-1,2,4), (-5,2,-2), (2,0,3), (1,2,3)\}$; $\mathbb{R}^3$

X3) Förklara varför vektormängden inte spänner vektorrummet:

a) $\{(-3,1,0), (1,1,1), (0,0,0), (-1,7,5)\}$; $\mathbb{R}^3$

b) $\{(1,3,2,2), (5,7,1,0), (-1,-2,-4,3)\}$; $\mathbb{R}^4$

X4) Visa att följande vektormängder är linjärt oberoende:

a) $\{(1,1,0,0), (1,-1,0,0), (0,0,-2,2), (0,0,1,1)\}$

b) $\{(2,-2,0,4), (-1,2,1,-2), (1,1,2,2)\}$

X5) Förklara varför vektormängden är linjärt beroende:

a) $\{(2,3,0), (1,-2,4), (1,1,0), (1,1,1)\}$

b) $\{(1,-3,0,2,1), (-2,6,0,-4,-2)\}$

c) $\{(1,2,-1), (1,0,1), (3,-2,5)\}$

d) $\{(1,0,0), (0,0,0), (0,0,1)\}$

X6) Visa att vektormängden bildar en bas för vektorrummet:

a) $\{(0,0,0,1), (0,0,1,1), (0,1,1,1), (1,1,1,1)\}$; $\mathbb{R}^4$

b) $\{(-3,1,0), (1,1,0), (-1,7,5)\}$; $\mathbb{R}^3$

X7) Förklara varför mängden inte bildar en bas:

a) $\{(-1,2,4), (-5,2,-2), (2,0,3), (1,2,3)\}$; $\mathbb{R}^3$

b) $\{(1,2,-1), (1,0,1), (3,-2,5)\}$; $\mathbb{R}^3$

c) $\{(1,2,-1), (1,0,1)\}$; $\mathbb{R}^3$

d) $\{(1,0), (0,0), (0,1)\}$; $\mathbb{R}^2$

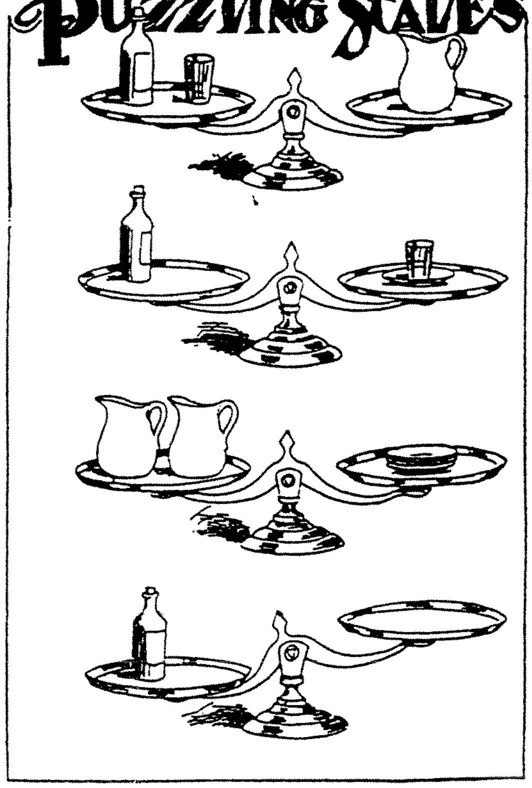
MOTHER'S JAM PUZZLE

How much does each jar hold?

MRS. HUBBARD has invented a clever system for keeping tabs on her jars of blackberry jam. She has arranged the jars in her cupboard so that she has twenty quarts of jam on each shelf. The jars are in three sizes. Can you tell how much each size contains?

PUZZLES

PUZZLING SCALES



How many glasses will balance with the bottle?