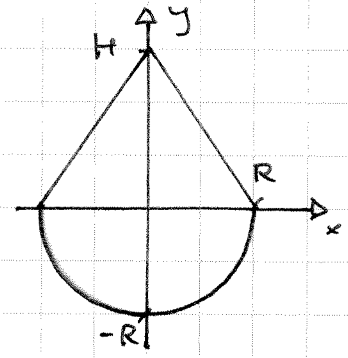
Gk1 i Matematik, hemtal on v 50/07 Metsalo

Detta är sista hemtalsomgången. <u>Deltentamen 3</u> äger rum ti 18.12. kl. 9-12 och omfattar <u>kap. 4.6 - 7.9</u> i Adams. <u>Sluttentamen</u> äger rum må 14.1. kl. 16-20. På sluttentamen räknas hemtals- och datorövningspoängen inte längre tillgodo. Till sluttentamen måste man förhandsanmäla sig.

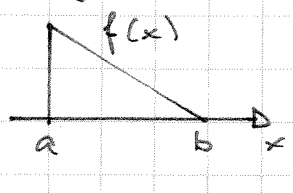
On: 1) Svaken tänker svarva en liten kloss av homogent trävirke åt sin lilla systerdotter. Den består av ett halvklot med radien R och ovanpå det en kon med höjden H. (I figuren syns ett tvärsnitt genom klossens symmetriaxel.)



Hur stor får H maximalt vara i förhållande till R för att klossen inte skall välta, då den står på halvklotet? (Det gäller att se till att klossens tyngdpunkt är under halvklotets mittpunkt, dvs. att $\bar{y} < 0$ med koordinaterna som i figuren. Problemet är analogt med ex. 4 kap. 7.5, men det är naturligare att bryta upp integralen i två delar: $y \in [-R, 0]$ resp. $y \in [0, H]$.)

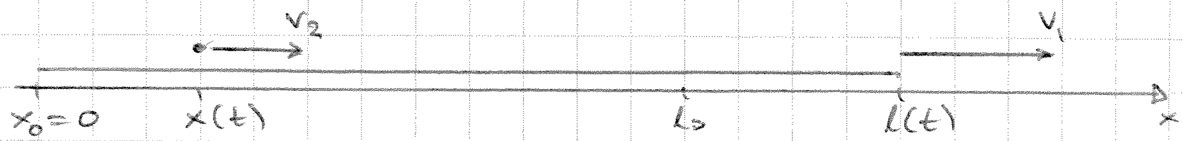
2) <u>Frekvensfunktionen</u> $f(x)$ hos en stokastisk variabel $X \in [a, b]$ satisfierar $f(x) \geq 0$ för $x \in [a, b]$, $f(x) = 0$ för $x \notin [a, b]$ och $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. <u>Fördelningsfunktionen</u> $F(x)$ satisfierar $F(x) = 0$ för $x \leq a$, $F'(x) = f(x)$ för $a < x < b$ och $F(x) = 1$ för $x \geq b$ och $F(x)$ är sannolikheten att $X \leq x$. Den stokastiska variabelns <u>väntevärde</u> (<u>medelvärde</u>) ges av $\mu = \int_a^b x \cdot f(x)\,dx$ (jämför med <u>tyngdpunkten</u> hos en stång), dess <u>varians</u> av $\sigma^2 = \int_a^b (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,dx$ och dess <u>standardavvikelse</u> av $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ (jämför med <u>tröghetsradien</u> hos en stång).

Bestäm frekvensfkn $f(x)$, fördelningsfkn $F(x)$, väntevärdet μ och standardavv. σ hos en stok. var. $X \in [a, b]$ med en triangulär frekvensfkn. som i figuren.



v.g. vänd

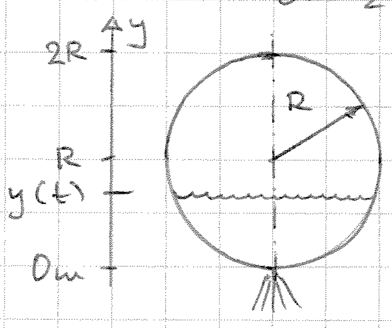
3)



En gummisnodd med den urspr. längden l_0 har vänster ända fäst i punkten $x_0 = 0$, men från och med tiden $t_0 = 0$ dras höger ända ut med den konstanta farten v_1, så snoddens längd vid tiden $t \geq t_0 = 0$ ges av $l(t) = l_0 + v_1 t$. Låt oss anta, att snodden töjs lika mycket över hela sin längd och att den kan dras ut hur långt som helst utan att brista.

Vid tiden $t_0 = 0$ börjar en snigel, som vi för enkelhets skull antar vara punktformig, krypa från vänster ända $x_0 = 0$ högerut med den konstanta farten v_2 i förhållande till sitt underlag, dvs. gummisnodden. Sätt upp differentialekvationen som bestämmer snigelns avstånd $x(t)$ från vänster ända vid tiden $t \geq t_0 = 0$ och lös den (den visar sig vara en 1:a ordningens <u>linjär</u> inhomogen ODE) för att få $x(t)$. Bestäm också tiden T det tar för snigeln att nå gummisnoddens högra ända, om den nu överhuvudtaget någonsin kommer fram dit (om t.ex. v_1 är mycket större än v_2).
(Kontroll: om $v_1 \gtrsim 0$, borde vi ha att $T \approx l_0/v_2$.)

4) Torricellis lag säger att $dV/dt = -A_0 \sqrt{2g} \cdot \sqrt{y(t)}$, då en vätska rinner ut genom ett hål med arean A_0 i botten av ett kärl (jmf. med demo on v48).

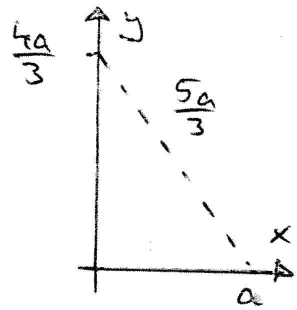


Vi har en sfärisk cistern med radien R och med ett hål med arean A_0 i botten, fylld med vatten.

a) Bestäm vätskedjupet, då vätskedjupet avtar långsammast.

b) Bestäm hur lång tid det tar innan cisternen tömts under inverkan av tyngdkraften, då vi bortser från friktion och turbulens vid uttömningen genom att sätta upp och lösa (implicit) motsv. diff.ekvation (den visar sig vara en 1:a ordningens <u>separabel</u> ODE).

Demo: Vid tiden $t_0 = 0$ s börjar en hare springa från origo längs positiva y-axeln med den konstanta farten v. I samma ögonblick observeras harpalten av en uv i punkten $(a, 0)$. Uven kan flyga med farten $\frac{5}{4} \cdot v$, så om den vore säker på att haren fortsätter att springa upp längs y-axeln, skulle den flyga mot punkten $(0, \frac{4}{3} a)$ och komma dit samtidigt som haren. Uven vet dock av bitter erfarenhet att ibland upptäcker haren den, så den flyger i stället så att den alltid flyger i riktning mot haren. Vi bestämmer kurvan längs vilken uven flyger samt platsen för nedslaget, om harstackaren inte märker den annalkande faran utan fortsätter att intet ont anande springa längs y-axeln.

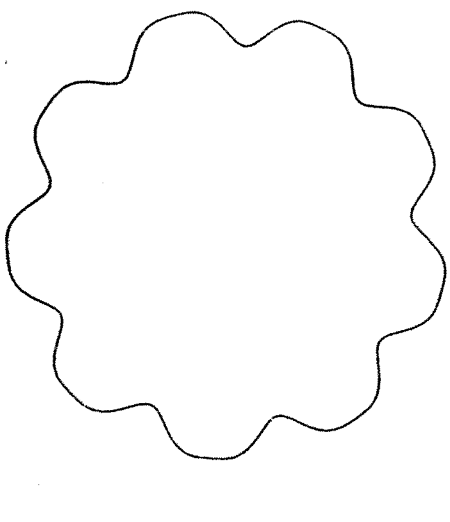


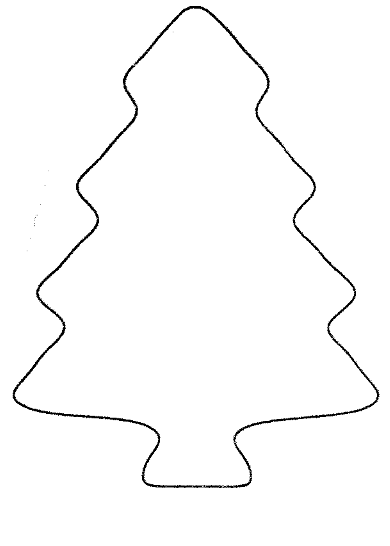
På kursens hemsida kommer det att sättas upp en länk till <u>kursutvärderingen</u>. Fyll i den efter att kursen avslutats. Lycka till på mellanförhöret / /slutentamen! Och om ni skall baka pepparkakor, utnyttja det ni lärt er, t.ex. kurvor på parameterform

$$(x(\theta), y(\theta)) = ((6-\sin^4(9\theta/2)) \cdot \cos\theta, (6-\sin^4(9\theta/2)) \cdot \sin\theta)$$

eller implicit som

$$(160x)^4 = \sqrt{(2+y)(12-y)^3} \cdot [176-13y+64\arctan(10y) + 28\sin(2y)+7\sin(4y)]^4 .$$





God Jul och
Gott Nytt År!

Georg