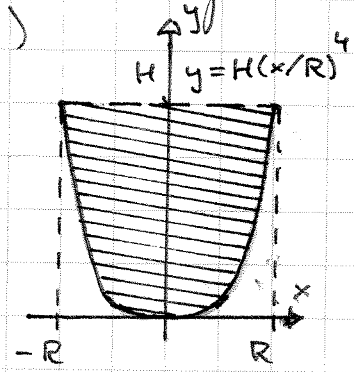
Gk1 i Matematik, hemtal v49/07 — Metsalo

Detta är näst sista hemtalsomgången. Sista räkneövningen äger rum onsdagen 12.12. och sista föreläsningen (som i första hand är till för att besvara frågor) äger rum på Lucia-dagen.

Ov: 1a) 5.5.47/45/45 b) 5.5.48/46/46 c) 5.5.54/52/52
(uppl. 4/uppl. 5/uppl. 6) (Huvudsatsen "baklänges")

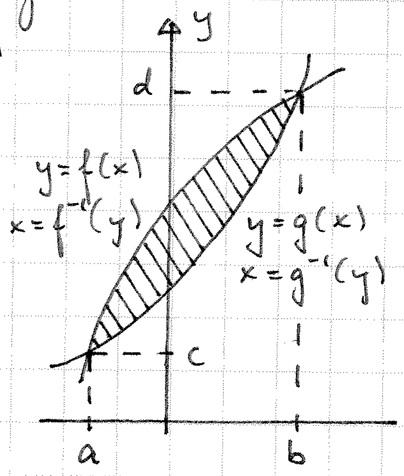
2) 7.2.14/16/16 (ellipsoidens volym)

3) Vi tillverkar ett rotationssymmetriskt vattenur med tvärsnittsprofilen som i figuren t.h. (jmf. med förra onsdagens demo). I så fall sjunker vattennivån med konstant hastighet, om vattnet läcker ut genom ett hål i botten. Beräkna vattenurets volym mha.



a) tvärsnittsmetoden b) metoden med cylindriska skal.

4) Låt f och g vara två funktioner, definierade, kontinuerliga och strängt växande i $[a, b]$ sådana att $f(a) = g(a) = c > 0$, $f(b) = g(b) = d$ och $f(x) > g(x)$ för $a < x < b$, som i fig. t.h. Då har f och g inversfunktionerna f^{-1} resp. g^{-1}, som är def., kont. och str. växande i $[c, d]$ sådana att $f^{-1}(c) = g^{-1}(c) = a$, $f^{-1}(d) = g^{-1}(d) = b$ och $g^{-1}(y) > f(y)$ för $c < y < d$.



(forts. på nästa sida)

4) (forts.) Då det i figuren skuggade området, som begränsas av kurvorna $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ och $y = g(x) \Leftrightarrow x = g^{-1}(y)$ roterar kring x-axeln, uppstår en rotationssymmetrisk kropp. Tvärsnittsmetoden ger att dess volym är $V_1 = \int_a^b \pi((f(x))^2 - (g(x))^2)\,dx$, medan metoden med cylindriska skal ger att volymen är $V_2 = \int_c^d 2\pi y\,(g^{-1}(y) - f^{-1}(y))\,dy$. Dessa två integraler borde ge samma värde, då det ju rör sig om samma volym. Visa att $V_1 = V_2$. (Gott råd: använd variabelsubstitution och partiell integrering.)

Demo: Då en partikel med massan m rör sig med farten v, är dess kinetiska energi $E_{kin} = mv^2/2$. Vi beräknar kinetiska energin hos en tunn cirkelskiva med radien R (enh. m) och areadensiteten δ (enh. kg/m^2), som roterar med vinkelhastigheten ω (enh. rad/s) kring

a) en diameter   b) mittpunkten

Fr: 1) Vi studerar öglan $27y^2 = x^2(9-x)$ från on v48:

a) Låt öglan rotera kring x-axeln och beräkna volymen hos den droppformiga kroppen, som uppstår.

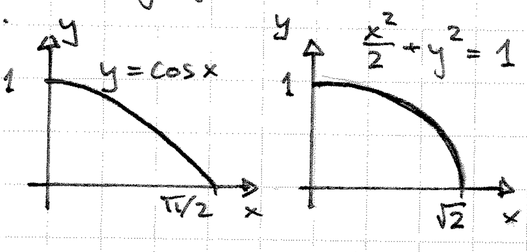
b) Låt öglan rotera kring y-axeln och beräkna volymen hos kroppen, som uppstår.

2a) Beräkna båglängden hos öglan $27y^2 = x^2(9-x)$.

b) Beräkna arean hos begränsningsytan till den droppformiga kroppen i uppgift 1a) ovan.

c) Beräkna arean hos begränsningsytan till kroppen i uppgift 1b) ovan.

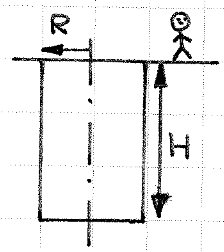
3a) Använd variabelsubstitution till att visa att de två kurvorna till höger har samma längd.



b) Approx. denna längd genom att approx. motsv. integral mha. trapetsmetoden el. Simpsons metod (välj själv) genom att dela upp integrationsintervallet i 2 lika långa delintervall.

c) Bestäm en övre gräns för felet i approx. i b)-delen. (Felet beror på valet av metod: trapets el. Simpson)

4) En tank på formen av en rät cirkulär cylinder har radien R och höjden H. Den är fylld med sockerlösning, som stått ett tag, så densiteten är högre i botten. På djupet y är densiteten $\delta(y) = \delta_0 \cdot \sqrt{1+(y/H)^2}$, så vid ytan är densiteten δ_0 (enh. kg/m^3), men i botten $\sqrt{2}\,\delta_0$.



a) Beräkna massan hos sockerlösningen. (Integraltabellerna i slutet av Adams kan vara till nytta.)

b) Beräkna arbetet som utförs, då sockerlösningen pumpas upp ur tanken till marknivån.

Demo: Om en stång har (den kontinuerliga) längddensiteten $\delta(x) \geq 0$ kg/m för $x \in [a,b]$ ges dess massa av

$$m = \int_a^b \delta(x) \cdot dx.$$

Stångens tyngdpunkt eller masscentrum ges av

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \cdot \int_a^b x \cdot \delta(x) \cdot dx$$

och anger var stångens massa i genomsnitt finns. Storheten $J_c = \int_a^b (x-c)^2 \cdot \delta(x) \cdot dx$ kallas för stångens tröghetsmoment kring punkten c. Tröghetsradien $\sqrt{J_{\bar{x}}/m}$ ger ett mått på hur mycket stångens massa i genomsnitt avviker från tyngdpunkten.

Längddensiteten hos en stång med längden L (enh. m) ges av $\delta(x) = \delta_0 \cdot \cos(\pi x / 2L)$ för $x \in [0\,m, L]$, där δ_0 har enheten kg/m.

a) Vi beräknar stångens massa.

b) Vi bestämmer punkten, som delar stången i två delar med samma massa.

c) Vi beräknar stångens tyngdpunkt (masscentrum) $\bar{x}$.

d) Vi bestämmer stångens tröghetsmoment $J_{\bar{x}}$ kring tyngdpunkten samt stångens tröghetsradie.

e) Vi visar att tröghetsmomentet är minst just kring tyngdpunkten $\bar{x}$.

f) Vi visar att resultatet i e)-delen gäller för godtyckliga (kontinuerliga) längddensitetsfunktioner $\delta(x) \geq 0$ kg/m och inte bara för denna speciella stång.