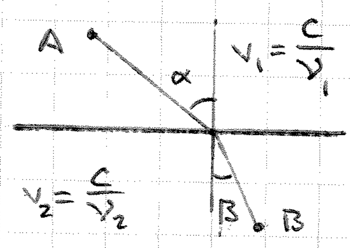
Gk1 i Matematik, Veckoblad v47/07 Metsalo

Ov: Räkneövningen används till nedanstående

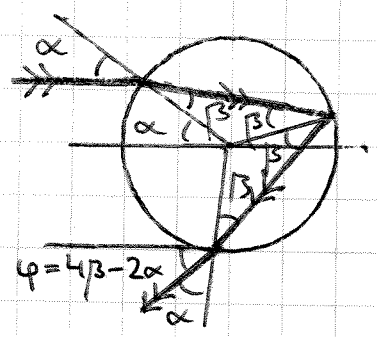
Demo: a) Fermats princip säger att då ljus tar sig från en punkt till en annan, går det längs den snabbaste vägen. Om vi har två media med ljushastigheterna v_1 resp. v_2 och ljuset skall gå från en punkt A i det ena mediet till en punkt B i det andra, så säger Snells lag att ljuset bryts så att $\sin\alpha / \sin\beta = v_1 / v_2$. Vi härleder Snells lag ur Fermats princip. $\nu_i = c/v_i$ (där c är ljushastigheten i vacuum) kallas för mediets brytningsindex.



b) I Elebom: Räknetabeller hittar vi vattnets brytningsindex:

Våglängd (nm):	760.8	686.7	656.7	589.3	527.0	486.1	430.8	396.8
Brytningsindex:	1.329	1.330	1.331	1.333	1.335	1.337	1.341	1.344

Vi använder den informationen och Snells lag ovan till att visa var, hur och kanske det intressantaste: varför man hittar regnbågen, då solen skiner lågt på himlen och det regnar. Verifiera sedan resultatet via observation, då tillfälle ges.



Fr: 1) Bestäm hur många reella nollställen funktionen $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 4$ har samt använd Newtons metod (även känd som Newton-Raphsons metod) för att approximera dessa med två korrekta decimaler. Visa hur vi vet, att bägge decimalerna är korrekta.

2) Bestäm Maclaurinpolynomet (Taylorpolynomet utvecklat i punkten $x = 0$) av ordning (grad) $n = 3$ till funktionen $f(x) = \sqrt{\exp(x) + \sin x} = (e^x + \sin x)^{1/2}$.

3) Bestäm alla asymptoter till kurvan till höger. $y = f(x) = \dfrac{x}{1 + e^{-x}} - \dfrac{1}{x}$

4a) $f(x) = (e^x - \cos x)/x$ är inte definierad i origo, men har ett gränsvärde där. Beräkna $\lim_{x \to 0} f(x)$.

b) $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0 \\ \lim_{x\to 0} f(x), & x = 0 \end{cases}$ är f:s kontinuerliga utvidgning. Beräkna $F'(0)$.

c) Beräkna $F'''(0)$.

Demot på baksidan.

Demo: Maclaurinpolynomet $P_n(x)$ av funktionen $f(x)=e^x$ är $P_n(x) = 1 + x + x^2/2! + \dots + x^n/n! = \sum_{k=0}^{n} x^k/k!$, vilket fås enkelt, eftersom $f^{(k)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1$.

Felet i approximationen $f(x) \approx P_n(x)$ är då $E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot e^{X} \cdot (x-0)^{n+1} = e^{X} \cdot x^{n+1}/(n+1)!$, där X är mellan 0 och x. I synnerhet får vi att $e = f(1) \approx P_n(1) = 1 + 1 + 1/2! + \dots + 1/n! = \sum_{k=0}^{n} 1/k!$ med ett fel $f(1) - P_n(1) = e^{X} \cdot 1/(n+1)! < \{2 < e < 3$ och X är mellan 0 och 1, så $e^{X} < 3^1 = 3\} < 3/(n+1)!$. Detta gör att vi kan approximera talet e (som i kap. 3.3 definierades mha. en area) med ett godtyckligt litet fel:

$\sum_{k=0}^{m} 1/k! < e < \sum_{k=0}^{n} 1/k! + 3/(n+1)!$ gäller för alla naturliga tal m och n. I kap. 9. får vi dessutom redskap för att visa att $e \notin \mathbb{Q}$.